

БИЛЕТЫ

математический

Анализ
(3 семестр)

Семенова

Дарья

группа 205

2019 - 2020



Вопросы к экзамену по математическому анализу ВМК 2курс 3 семестр

1. Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами.
2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Коши-Маклорена).
3. Теоремы Коши и Римана о перестановки членов в числовых рядах.
4. Признаки сходимости произвольных числовых рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Лейбница).
5. Арифметические операции над сходящимися рядами. Теорема Мертенса.
6. Бесконечные произведения. Критерии их сходимости.
7. Необходимое условие сходимости двойного ряда. Связь между сходимостью четырех рядов — повторных, двойного и «одинарного».
8. Абсолютная сходимость двойного ряда. Связь между сходимостью 4 рядов — повторных, двойного и «одинарного».
9. Обобщенные методы суммирования рядов. (Чезарро и Пуассона-Абеля).
10. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши.
11. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов (2 признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Вейрштрасса).
12. Признак Дини равномерной сходимости функциональных рядов и последовательностей. Почленный переход к пределу, непрерывность предельной функции функциональных последовательностей и рядов.
13. Почленное дифференцирование, существование первообразных функций для функциональных последовательностей и рядов.
14. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов (2 теоремы). Сходимость в среднем, связь с равномерной сходимостью.
15. Теорема Арцела. Признак равностепенной непрерывности функциональной последовательности.
16. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды.
17. Определение и доказательство существования двойного интеграла при помощи прямоугольных разбиений области. Классы интегрируемых функций. Основные свойства двойного интеграла.
18. Определение двойного интеграла при помощи произвольных разбиений области. Эквивалентность двух определений.
19. Сведение двойного интеграла к повторному однократному.
20. Кратные несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сходимости.

21. Кратные несобственные интегралы от знакопеременных функций.
Эквивалентность сходимости и абсолютной сходимости.
22. Криволинейные интегралы первого и второго рода.
23. Понятие поверхности. Нормальная и касательная плоскость к поверхности.
Лемма о проекции окрестности точки на касательную плоскость.
24. Площадь поверхности. Квадрируемость поверхности.
25. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
26. Преобразование базисов. Инварианты линейного оператора.
27. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля.
Повторные операции теории поля.
28. Формула Грина. Формула Остроградского-Гаусса.
29. Формула Стокса.
30. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования.

1. Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами.

Определение 1: Числовая посл-ть $a_1 \dots a_n \dots$, $a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — числовой ряд.
 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ — n -ая частичная сумма.

Определение 2: Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (1) сходится, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. S — сумма ряда.
Если $\nexists \lim S_n$, то ряд (1) расходится.

$\exists \lim S_n = S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N: |S - S_n| < \varepsilon$; $S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n$ — n -ый остаток ряда
 $\Rightarrow$ ряд сходится $\Leftrightarrow |r_n| < \varepsilon$, т.е. $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Теорема (критерий Коши): ряд (1) сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$

Доказательство:

$\{S_n\}$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ ($S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^n a_k$)

Следствие 1 (необходимое условие сходимости ряда) если ряд сх-ся, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Доказательство:

В критерии Коши возьмем $p=1$: $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \text{ т.е. } \forall n \geq N: |a_{n+1}| < \varepsilon$
(положим $N_0 = N+1 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$)

Следствие 2: Исключение из ряда $\forall$ конечного числа слагаемых не влияет на сходимость.

Следствие 3: Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$ ($c \neq 0$) сходятся и расходятся одновременно.

Теорема (необходимое и достаточное условие сх-ти рядов с неотриц. членами):

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, где $\forall k: p_k \geq 0$ сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$ ограничена (сверху)

Доказательство:

$S_{n+1} = S_n + p_{n+1} \geq S_n \Rightarrow \{S_n\}$ — монотонная неубывающая посл-ть

$\Rightarrow \forall$ сходящаяся посл-ть ограничена

$\Leftarrow$ последовательность частичных сумм не убывает (монотонна) $\Rightarrow$ для её сх-ти достаточна её ограниченность

2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Коши-Маклорена).

1° Признаки сравнения

Теорема 1: (1-ый признак сравнения)

Пусть имеется 2 ряда с неотрицательными слагаемыми $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$. $\forall k \geq 1: p_k \geq p'_k$.

- 1) из сходимости 2-го ряда $\Rightarrow$ сходимость 1-го ряда
- 2) из расходимости 1-го ряда $\Rightarrow$ расходимость 2-го ряда

Доказательство:

Для частичных сумм выполнено: $\sum_{k=1}^n p_k = S_n \leq S'_n = \sum_{k=1}^n p'_k$
Если 2-ой ряд сходится, то $\{S'_n\}$ ограничена сверху $\Rightarrow \{S_n\}$ ограничена $\Rightarrow$ 1-ый ряд с-ся
Если 1-ый ряд расходится, то $S_n \rightarrow +\infty \Rightarrow S'_n \rightarrow +\infty$

Теорема 2: (2-ой признак сравнения)

Пусть для рядов $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ с неотрицательными членами, начиная с некоторых номеров p_k, p'_k положительны. Тогда, если $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p'_k} = L \neq 0$, то эти 2 ряда сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \forall k \geq N: \left| \frac{p_k}{p'_k} - L \right| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{p_k}{p'_k} < L + \varepsilon \Rightarrow p_k < \widetilde{(L + \varepsilon)} p'_k \quad (p_k < C \cdot p'_k)$$

Теорема 3: (3-ий признак сравнения)

Пусть для рядов $\sum p_k$ и $\sum p'_k$ с неотрицательными членами, начиная с некоторых номеров p_k, p'_k положительны. Тогда, если $p^{k+1}/p_k \leq p'^{k+1}/p'_k$, то

- 1) из сходимости 2-го ряда $\Rightarrow$ сходимость 1-го ряда
- 2) из расходимости 1-го ряда $\Rightarrow$ расходимость 2-го ряда

Доказательство:

$$\frac{p_{k_0+1}}{p_{k_0}} \leq \frac{p'_{k_0+1}}{p'_{k_0}}, \dots, \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{p'_{n+1}}{p'_n}. \text{ Перемножим их почленно для } k = k_0, \dots, n \Rightarrow p_{n+1} \leq \left(\frac{p_{k_0}}{p'_{k_0}} \right) \cdot p'_{n+1}$$

2° Признаки Даламбера, Коши, Коши-Маклорена

Теорема 4: (признак Даламбера)

Пусть $\forall k \geq k_0: p_k > 0$. Тогда

- I. Если $p^{k+1}/p_k \leq q < 1$, то ряд $\sum p_k$, где $p_k \geq 0$ сходится.
Если $p^{k+1}/p_k \geq 1$, то ряд расходится
- II. Пусть $\exists \lim p^{k+1}/p_k = L$. Если $L < 1$, то ряд с-ся. Если $L > 1$, то рас-ся

Доказательство:

I. Если $p^{k+1}/p_k \leq q = q^{k+1}/q^k$, то (3-ий признак с-ти) $\sum q^k$ с-ся $\Rightarrow \sum p_k$ с-ся
Если $p^{k+1}/p_k \geq 1 \quad \forall k \geq k_1$, то $p_{k+1} \geq p_k \geq p_{k_1} > 0 \Rightarrow$ нарушено необх. условие с-ти $\Rightarrow$ расходится.

II. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall k \geq N: L - \varepsilon < p^{k+1}/p_k < L + \varepsilon$.

$$1. L = 1 - 2\varepsilon \Rightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon \Rightarrow \text{аналогично 1. } (p^{k+1}/p_k < 1 - \varepsilon, \text{ где } \varepsilon > 0) \quad (L < 1)$$

$$2. L = 1 + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon = 1 \Rightarrow \text{аналогично 1. } (1 < p^{k+1}/p_k) \quad (L > 1)$$

Замечание 1: $L = 1$: признак не дает однозначного ответа. $(\sum \frac{1}{k^2}, \sum \frac{1}{k})$

Можно проанализировать с помощью признака Раабе, Лейбница итд..

Замечание 2: Можно использовать $L = \lim_{k \rightarrow \infty} p^{k+1}/p_k$

Теорема 5: (признак Коши)

I. Если $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1, \forall k \geq k_0$, то ряд $\sum p_k, p_k \geq 0$ сходится.
Если $\sqrt[k]{p_k} \geq 1$, то ряд расходится
II. Пусть $\lim \sqrt[k]{p_k} = L$. Если $L < 1$, то с.с. Если $L > 1$, то расх.с.

Доказательство:

I. $p_k \leq q^k, q < 1$. $\sum q^k$ сходится (S_n ограничена) $\Rightarrow \sum p_k$ с.с.
 $p_k \geq 1$ - расходится, т.к. нарушено необходимое условие с.с.-ти.

II. $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall k \geq N: L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$

1. $L < 1$. $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-L) \Rightarrow L + \varepsilon < 1 \Rightarrow \sqrt[k]{p_k} < 1 \Rightarrow \sum p_k$ - с.с. (I)

2. $L > 1$. $\varepsilon = \frac{1}{2}(L-1) \Rightarrow \sqrt[k]{p_k} > L - \frac{1}{2}(L-1) > 1 \Rightarrow \sum p_k$ - расх.с. (I)

Замечание 1: (см. Т. 4)

Замечание 2: (см. Т. 4)

Теорема 6: (признак Коши-Маклюрена)

Пусть существует неотрицательная ф-ия $f(x)$, которая определена и монотонно не возрастает на $[1, +\infty)$ для которой $f(k) = p_k, \forall k$.
Тогда сходимость/расходимость ряда $\sum p_k, p_k \geq 0 \Leftrightarrow$ сходимость/расходимость $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

Доказательство:

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [k, k+1]: f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) \Rightarrow f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1), k=1, \dots, n-1$
 $f(1) + \dots + f(n-1) \geq \int_1^n f(x) dx \geq f(2) + \dots + f(n) \Rightarrow S_{n-1} \geq \int_1^n f(x) dx \geq S_n - p_1$

Если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то $\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq M \Rightarrow S_n \leq M + p_1 \Rightarrow \sum p_k$ с.с.

Если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то $(f(x) \geq 0) \int_1^n f(x) dx \rightarrow +\infty \Rightarrow S_{n-1} \rightarrow +\infty$

Замечание 1: Если $p_k = \frac{1}{k^\alpha}, 1 < \alpha < 2$, то $f(x) = x^{-\alpha}$. $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}$

3. Теоремы Коши и Римана о перестановки членов в числовых рядах.

Теорема 1: (Теорема Римана)

Если ряд сходится условно, то $\forall L \in \mathbb{R}$, либо $L = \pm\infty$, можно так переставить члены ряда, чтобы преобразованный ряд стремился к L .

Доказательство:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - условно сходящийся ряд (1). $p_1, p_2, p_3, \dots$ - положительные члены ряда (1) в порядке появления, $q_1, q_2, q_3, \dots$ - модуль отрицательных членов ряда (1) в порядке появления.

• S_n^p - сумма положительных членов (1) среди первых n членов.

S_n^q - сумма модулей отрицательных членов (1) среди первых n членов.

$$\text{I. } S_n^p - S_n^q = a_1 + \dots + a_n \rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\text{II. } S_n^p + S_n^q = |a_1| + \dots + |a_n| \rightarrow +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$$\text{I} + \text{II} = 2S_n^p \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n \text{ - расходится (отрицательных и положительных членов (1) бесконечно много)}$$

$$\text{II} - \text{I} = 2S_n^q \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q_n \text{ - расходится}$$

• $p_n \rightarrow 0, q_n \rightarrow 0$ (т.к. $a_n \rightarrow 0$, необходимое условие сходимости)

• $L \in \mathbb{R}$:

Пусть $n_1 \in \mathbb{N}$: $p_1 + \dots + p_{n_1-1} < L$, но $p_1 + \dots + p_{n_1} \geq L$ (если $p_1 \geq L$, то $n_1 = 1$)

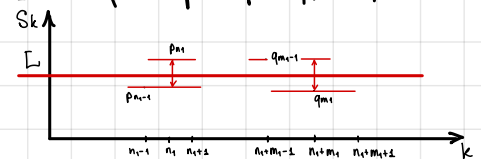
Пусть $m_1 \in \mathbb{N}$: $p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{m_1-1} \geq L$, но $p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} < L$ (если $p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 < L$, то $m_1 = 1$)

Аналогично выбираются $n_2 > n_1$ и $m_2 > m_1$, т.е.:

$$p_1 + \dots + p_{n_2} - q_1 - \dots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2} \geq L$$

$$p_1 + \dots + p_{n_2} - q_1 - \dots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2} - q_{m_1+1} - \dots - q_{m_2} < L$$

и т.д.



Но по построению модуль $|S_k - L|$ не превосходит последнего члена последней из завершающих групп. Т.к. $p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ и $q_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} |S_k - L| = 0$

• $L = \pm\infty$

$$n_1: p_1 + \dots + p_{n_1} > 1 + q_1$$

$$n_2: p_1 + \dots + p_{n_2} - q_1 + \dots + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2} > 2 + q_2 \quad \text{и т.д.}$$

Последовательность частичных сумм преобразованного ряда - бесконечно большая последовательность

Теорема 2: (теорема Коши)

Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (1) сходится абсолютно, $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ (1') - ряд, полученный из (1) перестановкой. Тогда ряд (1') сходится абсолютно и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k$

Доказательство:

1) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. Покажем, что $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = S$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1, \forall n \geq N_1: \left| \sum_{k=1}^n a_k - S \right| < \varepsilon/2$$

$$\text{Сходится абсолютно} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n \geq N_2, \forall p \in \mathbb{N}: \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon/2 \quad \left. \vphantom{\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|} \right\} N_3 = \max \{N_1, N_2\}$$

Выберем номер N , что среди $a'_1, \dots, a'_N$ содержатся все $a_1, \dots, a_{N_3}$.

$$\forall n \geq N: \sum_{k=1}^n a'_k - S = \left(\sum_{k=1}^n a'_k - \sum_{k=1}^{N_3} a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_3} a_k - S \right) \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n a'_k - S \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a'_k - \sum_{k=1}^{N_3} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_3} a_k - S \right| \quad (*)$$

• $\left| \sum_{k=1}^n a'_k - \sum_{k=1}^{N_3} a_k \right|$ (сумма $n - N_3$ членов ряда, номера которых превосходят N_3 , значит

$\exists p \in \mathbb{N}$, что $N_3 + p$ превосходит номера всех $n - N_3$ членов ряда)

$$\left| \sum_{k=1}^n a'_k - \sum_{k=1}^{N_3} a_k \right| < \sum_{k=N_3+1}^{N_3+p} |a_k| < \varepsilon/2$$

$$(*) \left| \sum_{k=1}^n a'_k - S \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a'_k - \sum_{k=1}^{N_3} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_3} a_k - S \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a'_k = S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

2) При аналогичном рассуждении с рядами $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k|$ докажем, что ряд (1') сходится абсолютно

4. Признаки сходимости произвольных числовых рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Лейбница).

Преобразование Абеля

$\{u_k\}, \{v_k\}$ — произвольные последовательности. $S_k = u_1 + \dots + u_k \Rightarrow u_k = S_k - S_{k-1}, k \geq 2$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) \cdot v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) S_k + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} \quad (*)$$

Определение: Последовательность $\{a_n\}$ — последовательность с ограниченным изменением, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|$

Утверждение: Последовательность с ограниченным изменением сходится.

Доказательство: Абсолютно сходящийся ряд сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)$ сходятся к S .

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = S + a_1 \Rightarrow \{a_n\} \rightarrow S + a_1$$

Теорема 1: (1ый признак Абеля)

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Пусть по последовательность частичных сумм $\{S_n^a\}$ ограничена, $\{b_n\}$ — последовательность с ограниченным изменением, $b_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство:

$$\exists M: |S_n^a| \leq M.$$

- $b_n \rightarrow 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0, \exists N_1: \forall n \geq N_1: |b_n| < \frac{\varepsilon}{3M}$
 - $\{b_n\}$ — последовательность с ограниченным изменением $\Rightarrow$ (по критерию Коши) $\exists N_2: \forall n \geq N_2, \forall p \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n+p} |b_{k+1} - b_k| < \varepsilon/3M$
 - $N = \max\{N_1, N_2\}. \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$ напишем тождество Абеля (*):
- $$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k^a| \cdot |b_{k+1} - b_k| + |S_{n+p}^a| \cdot |b_{n+p}| + |S_n^a| \cdot |b_{n+1}| < M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon$$
- $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится по критерию Коши.

Теорема 2: (2ой признак Абеля)

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится, $\{b_n\}$ — последовательность с ограниченным изменением. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство:

- Сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ заведомо обладает ограниченной $\{S_n^a\} \Rightarrow \exists M: |S_n^a| \leq M$
 - $\{b_n\}$ сходится как последовательность с ограниченным изменением, т.е. $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
 $b'_n = b_n - b \Rightarrow b'_{n+1} - b'_n = b_{n+1} - b_n \Rightarrow \{b'_n\}$ — последовательность с ограниченным изменением, $b'_n \rightarrow 0$.
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b'_n + b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b'_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b'_n + b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b'_n$ сходится по 1ому признаку Абеля;
 - $b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по условию теоремы
- $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

Признак Дирихле-Абеля

Для сходимости ряда $\sum a_n b_n$ достаточно выполнение одного из двух условий:

- I. - Ограниченная последовательность частичных сумм $\{S_n^a\}$
 - $\{b_n\}$ монотонно сходится к нулю
- II. - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
 - $\{b_n\}$ монотонная и ограниченная последовательность;

Признак Лейбница

[Пусть последовательность $\{p_n\}$ не возрастает и $p_n \rightarrow 0$.
Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} p_n$ сходится]

Доказательство:

$a_n = (-1)^{n+1}$, тогда $S_n^a = \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{чётное} \\ 1, & \text{если } n - \text{нечётное} \end{cases} \Rightarrow \{S_n^a\} - \text{ограничена}$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} p_n$ сходится по I признаку Абеля-Дирихле.

5. Арифметические операции над сходящимися рядами. Теорема Мертенса.

Теорема 1:

[Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и имеют суммы U и V ,
то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ сходится к $U \pm V$.]

Доказательство:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad G_n = \sum_{k=1}^n v_k \Rightarrow \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = S_n \pm G_n \rightarrow U \pm V$$

Теорема 2:

[Пусть ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ абсолютно сходятся к суммам U и V .
Тогда ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_j$,
заключенных в $\forall$ порядке, абсолютно сходится к сумме UV .]

Доказательство:

Обозначим через ω_k произведение $u_i v_j$ заключенные в $\forall$ порядке.

Докажем, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k|$ сходится.

Рассмотрим частичную сумму этого ряда: $W_n = \sum_{k=1}^n |\omega_k|$, $\omega_k = u_{i(k)} v_{j(k)}$.

Пусть $\max_{1 \leq k \leq n} i(k) = i_0$, $\max_{1 \leq k \leq n} j(k) = j_0$. Тогда: $W_n \leq \sum_{i=1}^{i_0} |u_i| \cdot \sum_{j=1}^{j_0} |v_j| \leq UV$ (в силу сходимости рядов)

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k|$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k$ сходится абсолютно и по теореме Коши сумма не меняется при перенумерации элементов.

Докажем, что $\sum \omega_k$ имеет сумму UV . Изменим порядок суммирования на "по квадратам". Частичные суммы нового ряда с номерами $n = m^2$ равны: $(\sum_{i=1}^m u_i) \cdot (\sum_{j=1}^m v_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U \cdot V$

$$\left\| \begin{array}{cccc} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & \dots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|$$

Теорема 3: (Мертенса)

[Пусть ряд $\sum u_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum v_n$ сходится условно.
Тогда ряд $\sum \omega_n$, составленный из сумм произведений по правилу Коши
сходится и его сумма равна UV .]

Доказательство:

• Суммирование по Коши: $\omega_n = \sum_{k=1}^n u_k v_{n-k}$.

$$W_n = \sum_{k=1}^n \omega_k = u_1 v_n + (u_1 v_{n-1} + u_2 v_n) + \dots + (u_1 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_1) = u_1 \cdot v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1;$$

В силу сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$: $v_n - V = \alpha_n$, $\alpha_n \rightarrow 0$, значит:

$$W_n = u_1(V + \alpha_n) + u_2(V + \alpha_{n-1}) + \dots + u_n(V + \alpha_1) = V \cdot (u_1 + \dots + u_n) + u_1 \alpha_n + \dots + u_n \alpha_1$$

Покажем, что $u_1 \alpha_n + \dots + u_n \alpha_1$ — бесконечно малая.

$\{\alpha_n\} - \delta.м. \Rightarrow \exists C > 0$, т.ч. $|\alpha_n| \leq C, \forall n$;

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — сходится абсолютно $\Rightarrow$ для $\varepsilon > 0 \exists m = m(\varepsilon)$, т.ч. $\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \varepsilon/2C$

$\exists M_1$, т.ч. $\sum_{k=1}^m |u_k| \leq M_1 \quad \forall n$

$(u_1 \alpha_n + \dots + u_m \alpha_{n-m+1}) + (u_{m+1} \alpha_{n-m} + \dots + u_n \alpha_1)$, где $\{\alpha_i\} - \delta.м.$, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ с.с. абсолютно.

По $m = m(\varepsilon)$ выберем $n_1 = n_1(\varepsilon)$, что $|\alpha_k| < \varepsilon/2M_1$ при $\forall k > n_1 - m$.

$$|(u_1 \alpha_n + \dots + u_m \alpha_{n-m+1}) + (u_{m+1} \alpha_{n-m} + \dots + u_n \alpha_1)| < (|u_1| \cdot \frac{\varepsilon}{2M_1} + \dots + |u_m| \cdot \frac{\varepsilon}{2M_1}) + (|u_{m+1}| \cdot C + \dots + |u_n| \cdot C) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2M_1} \cdot (|u_1| + \dots + |u_m|) + C \cdot (|u_{m+1}| + \dots + |u_n|) \leq \frac{\varepsilon}{2M_1} \cdot M_1 + C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon \Rightarrow \text{наша сумма} - \delta.м.$$

$$\Rightarrow W_n = V \cdot U_n + (u_1 \alpha_n + \dots + u_n \alpha_1) \rightarrow VU$$

6. Бесконечные произведения. Критерии их сходимости.

Определение: Пусть дана $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\prod_{k=1}^{\infty} v_k = v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k \cdot \dots$ - бесконечное произведение.
 $\prod_{k=1}^{\infty} v_k$ - сходится к P , если 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$, 2) $P \neq 0$.
 Если $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$, то $\prod_{k=1}^{\infty} v_k$ - расходится.

Теорема 1: (необходимое условие сходимости)
 [Если $\prod_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится, то $v_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$.]

Доказательство:

$$\exists P \neq 0. \text{ Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n+1} = P \Rightarrow v_{n+1} = P_{n+1}/P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P/P = 1$$

Теорема 2:

[$\prod_{k=1}^{\infty} v_k$ (бесконечное произведение с положительными членами) сходится к $P \Leftrightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k$ сходится к $\ln P$]

Доказательство:

$$\prod_{k=1}^n v_k: \prod_{k=1}^n v_k = P_n; \sum_{k=1}^n \ln v_k: \sum_{k=1}^n \ln v_k = S_n.$$

$$S_n = \ln P_n \Rightarrow P_n = e^{S_n}, \text{ где } q\text{-ли } \ln t \text{ и } e^t \text{ непрерывны.}$$

Теорема 3:

[Если все $v_k = 1 + u_k$ (начиная с некоторого номера) больше 1, то $\prod_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.]

Доказательство:

$$v_k = 1 + u_k, u_k \rightarrow 0 \text{ (необходимое условие сходимости ряда } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{).}$$

Если $u_k > 0$, начиная с некоторого номера k , то рассматриваемый ряд состоит из положительных слагаемых, т.е. $\ln(1 + u_k) > 0$.

$$\ln(1+y) = y + o(y): \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{\ln(1+u_k)}$$

$$\text{По теореме сравнения ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ сходим } \Leftrightarrow \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k \text{ сходим.}$$

По теореме 2 следует утверждение теоремы 3.

Теорема 4:

[Пусть ряд $\sum u_k$ сходится. $\prod_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2$ сходится.]

Доказательство:

$$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), y \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(1+u_k) = u_k - \frac{1}{2}u_k^2 + o(u_k^2) = u_k - \frac{1}{2}u_k^2(1+o(1))$$

$$\Rightarrow \sum \ln(1+u_k) = \sum u_k - \frac{1}{2} \sum u_k^2 \cdot (1+o(1)), (1+o(1)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1, \forall k \geq k_0 \Rightarrow u_k^2(1+o(1)) \sim u_k^2$$

7. Необходимое условие сходимости двойного ряда. Связь между сходимостью двойного ряда и повторного ряда. Критерий сходимости двойного ряда с неотрицательными членами.

Определение: $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ ($\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}$) — повторные ряды. Бесконечная матрица из $a_{kl} \in \mathbb{R}, k, l \geq 1$

Повторный ряд с.с., если сходится каждый из рядов $\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, k=1, 2, \dots$ и с.с. $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k — сумма k -го ряда.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Определение: $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ — двойной ряд.

Двойной ряд с.с., если при независимом стремлении $m, n \rightarrow \infty \exists \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} \quad (S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl})$

Теорема 1: (необходимое условие с.с. двойного ряда)

[Если $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ сходится, то $a_{kl} \rightarrow 0$ при независимом стремлении $k, l \rightarrow \infty$.]

Доказательство:

$$S_{kl} + S_{k+1, l-1} - S_{k, l-1} - S_{k+1, l} \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} S + S - S - S = 0 \Rightarrow a_{kl} \rightarrow 0$$

Теорема 2:

[Если сходится двойной ряд и с.с. все «строки» ряда $\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ тогда повторный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ с.с., причем к сумме двойного ряда.]

Доказательство:

$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0(\varepsilon), n_0(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall n \geq n_0, \forall m \geq m_0: |S - S_{mn}| < \varepsilon \Rightarrow |\lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} - S| < \varepsilon$
или $|S - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl}| < \varepsilon$ (последовательность индекса n)

При $n \rightarrow \infty: |S - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}| \leq \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^m A_k$ сходится к S .

Теорема 3:

[Рассмотрим двойной ряд $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ с неотрицательными слагаемыми, $a_{kl} > 0 \forall k, l$.]
[В этом случае двойной ряд сходится $\Leftrightarrow \{S_{mn}\}$ ограничена]

Доказательство:

$\Rightarrow$: Пусть $\exists \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = S, S_{mn} \leq S_{m'n'} \leq S \quad (m' \geq m, n' \geq n)$

$\Leftarrow$: Из ограниченности $\{S_{mn}\}$ следует $\exists S = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} S_{mn}$. По определению:

1) $\forall m, n: S_{mn} \leq S$; 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0, n_0$, т.ч. $S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leq S$

Рассмотрим S_{mn} с номерами $m \geq m_0, n \geq n_0$.

$$S - \varepsilon \leq S_{mn} \leq S \Rightarrow |S_{mn} - S| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq \max(m_0, n_0)$$

8. Абсолютная сходимость двойного ряда. Связь между сходимостью 4 рядов — повторных, двойного и «одинарного».

Рассмотрим двойной ряд $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ со слагаемыми произвольного знака.

Определение: Двойной ряд абсолютно сходится, если сходится $\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|$ (*)

Теорема 1:

[Если сходится $\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|$, то сходится и $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$]

Доказательство:

$$\forall A \in \mathbb{R} : \frac{|A|+A}{2}, \frac{|A|-A}{2} : a_{kl} = \frac{|a_{kl}|+a_{kl}}{2} + \frac{|a_{kl}|-a_{kl}}{2}; \quad \frac{|a_{kl}|+a_{kl}}{2} \leq |a_{kl}| \quad \forall k, l$$

$$\sum \frac{|a_{kl}|+a_{kl}}{2}, \sum \frac{|a_{kl}|-a_{kl}}{2} - \text{ряды с неотрицательными слагаемыми}$$

Частичные суммы этих рядов не превосходят частичных сумм (*) $\Rightarrow$ эти два ряда сходятся $\Rightarrow$ их разность сходится (т.е. $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$)

Теорема 2:

[Пусть рассматриваются 4 ряда: 1) $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ 3) $\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}$ 4) $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$
 Тогда из абсолютной сходимости любого из них $\Rightarrow$ абсолютная сходимость всех других, и, при этом, их суммы равны.]

Доказательство:

1. I. ряд 2) $\Rightarrow$ ряд 4): $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| \rightarrow S^* \Rightarrow \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{kl}| \leq S^*$

$S_r^* = |a_{r1}| + \dots + |a_{rn}|$ — произвольная частичная сумма ряда $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|$
 Можно найти столь большие m и n , что все члены ряда $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$, входящие в его частичную сумму с номером r будут содержаться в $\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \Rightarrow S_r^* \leq S^* \Rightarrow$ ряд 4) сходится абсолютно

II. ряд 4) $\Rightarrow$ ряд 1): Последовательность частичных сумм $\{S_r^*\}$ ограничена.
 Найдется настолько большой номер r , что r -я частичная сумма ряда $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ будет содержать все члены входящие в S_{mn}^* ряда $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \Rightarrow S_{mn}^* \leq S_r^* \Rightarrow$ ряд 1) сходится абсолютно

III. ряд 1) $\Rightarrow$ ряд 2): $\sum_{l=1}^n |a_{kl}| \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}| \Rightarrow$ каждый из рядов $\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|, k=1, 2, \dots$ имеет ограниченную последовательность частичных сумм $\Rightarrow$ все эти ряды сходятся $\Rightarrow$ сходится абсолютно ряд 2)

2. Докажем, что все они сходятся к одной и той же сумме. $S^{(i)}$ — сумма i -ю ряда.
 Ряд 4) получен переenumerацией слагаемых абсолютно сходящегося ряда 1) $\Rightarrow S^{(4)} = S^{(1)}$
 Сходимость двойного ряда } $\xrightarrow{T.F.2} S^{(1)} = S^{(2)}$
 Сходимость строчных рядов }

9. Обобщенные методы суммирования рядов. (Чезарро и Пуассона-Абеля).

1. Метод Чезарро (метод средних арифметических)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + \dots + S_n}{n} = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{(C)}{=} S, \text{ где } S_i - \text{частичные суммы}$$

2. Метод Пуассона-Абеля

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \quad \forall x \in (0, 1). \text{ Если } \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{(A)}{=} S$$

Теорема 1:

Методы Чезарро и Пуассона-Абеля линейны ($\sum (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$)
и мультипликативны ($\sum a_n = S$ в обычном смысле $\Rightarrow \sum a_n \stackrel{(C)}{=} S$)

Доказательство:

Чезарро (C):

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{(C)}{=} A, \{S_n'\}, G_n' = \frac{S_1' + \dots + S_n'}{n}; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \stackrel{(C)}{=} B, \{S_n''\}, G_n'' = \frac{S_1'' + \dots + S_n''}{n}$$

$$\forall \alpha, \beta: \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \stackrel{(C)}{=} \alpha A + \beta B \quad (\text{м.к. } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} G_n' = A, \lim_{n \rightarrow \infty} G_n'' = B)$$

$$(2) \text{ Пусть } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится к } S \text{ в обычном смысле, т.е. } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

$$\text{ Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + \dots + S_n}{n} = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} G_n = S.$$

$$\frac{(S_1 - S) + \dots + (S_n - S)}{n} =$$

$$\{S_n\} \rightarrow S \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N, \text{ т.ч. } \forall n \geq N: |S_n - S| < \varepsilon/2. \text{ Тогда}$$

$$= \frac{(S_1 - S) + \dots + (S_N - S)}{n} + \frac{(S_{N+1} - S) + \dots + (S_n - S)}{n} \Rightarrow |G_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ При достаточно большом } N_1 \text{ каждый элемент } < \varepsilon/2 \quad (\forall n \geq N_1) \\ (2) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(N-n)}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} G_n = S$$

Пуассон-Абель (A):

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \stackrel{(A)}{=} A, S^{(1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \text{ и } \exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S^{(1)}(x) = A$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} \stackrel{(A)}{=} B, S^{(2)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} \text{ и } \exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S^{(2)}(x) = B$$

$$\forall \alpha, \beta: \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \stackrel{(A)}{=} \alpha A + \beta B, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^{n-1} = \alpha S^{(1)}(x) + \beta S^{(2)}(x), \forall x \in (0, 1) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = \alpha A + \beta B$$

$$(2) \text{ Пусть } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \text{ в обычном смысле, тогда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = S(x) \text{ сходится по признаку Абеля } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S, \forall x \in (0, 1) \text{ (по теореме Абеля)}$$

* Дописать т.-м.у. Абеля (формулировка)

10. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость.
Критерий Коши.

Пусть в $\mathbb{R}^m$ задано множество X .

Определение: Если каждому $n \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие по определению закону некоторая ф-ия $f_n(x)$, определенная на мн-ве X , то мн-во записанных ф-ий $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ **ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ**. $\{f_n(x)\}$
Для $\forall x_0 \in X$: $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность. Если данная числовая последовательность сходится $\Rightarrow$ данная функциональная посл-ть сходится в x_0 .
Мн-во таких x_0 — область сходимости $\{x_0\}$.

Определение: Пусть $\{f_n(x)\}$ имеет область сходимости X . $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \forall x \in X$.
 $f(x)$ — **ПРЕДЕЛЬНАЯ Ф-ИЯ** функциональной посл-ти

Определение: $\{u_n(x)\}$ — функциональная последовательность.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ — **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ РЯД**.

На множестве области сходимости определена $S(x)$ — предельная ф-ия посл-ти частичных сумм этого ряда или его **СУММА**.

$$S_n(x) = \sum_{n=1}^n u_n(x) \rightarrow S(x) \quad \forall x \in X.$$

Предположим, что функц. посл-ть $f_1(x), \dots$ сходится к $f(x)$, $x \in X$. $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$

Определение: $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ **РАВНОМЕРНО**, если
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, т.е. $\forall n \geq N, \forall x \in X: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. $\{f_n(x)\} \xrightarrow{x} f(x)$

Замечание: Равномерная сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на множестве X эквивалентна существованию: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$ ($\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$).

Определение: Функциональный ряд сходится равномерно на X к сумме $S(x)$, если $\{S_n(x)\} \xrightarrow{x} S(x)$ на множестве X .

Теорема 1:

$$[\{f_n(x)\} \xrightarrow{x} f(x)] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), \text{ т.е. } \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X]$$

Доказательство:

$$\Rightarrow] f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ на мн-ве } X. \text{ Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), \text{ т.е. } \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2, \forall x \in X.$$

$$\text{Т.к. } p \in \mathbb{N} \Rightarrow n+p \geq N: |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in X.$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftarrow \text{Заметим, что данное условие для } \forall \text{ фиксированного } x \in X \text{ означает сходимость } \{f_n(x)\} \text{ в точке } x \in X \Rightarrow \exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ (критерий Коши сх-ти числовой посл-ти)}.$$

$$\text{В неравенстве } |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \text{ перейдем к пределу } p \rightarrow \infty \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon \Rightarrow \{f_n(x)\} \xrightarrow{x} f(x).$$

Теорема 2:

$$[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ равномерно сходится на } X] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), \text{ т.е. } \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon, \forall x \in X]$$

Доказательство:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x) \quad (\{S_n(x)\} \text{ сх-ся равномерно на } X).$$

Следствие: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сх-ся равномерно $\Rightarrow \{u_n(x)\} \xrightarrow{x} 0$ (т.е. $p=1 \Rightarrow |u_{n+1}(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$)

11. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Вейерштрасса).

Теорема 1 (признак Вейерштрасса) (является достаточным, но не необходимым)

Пусть все слагаемые ФР $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на X удовлетворяют: $|u_n(x)| \leq c_n, \forall x \in X$
 Тогда, если $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ с.с.с., то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с.с.с. равномерно на X .

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), \text{ т.ч. } \forall n \geq N, \forall x \in X: \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon.$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \quad \forall x \in X \Rightarrow \text{в силу критерия Коши с.с.с. равномерно на } X.$$

Теорема 2 (1ый признак Абеля)

Пусть 1) частичные суммы $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно ограничены на X
 2) ФП $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обладает равномерно ограниченным на X умножением и $\{v_n(x)\} \xrightarrow{x} f(x) = 0$
 Тогда ФР $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ сходится равномерно на X .

Доказательство:

$$1) \exists M > 0, \text{ т.ч. } \forall x \in X: \left| \sum_{n=1}^N u_n(x) \right| = |S_N(x)| \leq M, \forall N$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \exists N, \text{ т.ч. } \forall n \geq N, \forall x \in X: |v_n(x)| < \varepsilon/3M, \text{ и } \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \varepsilon/3M$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), u_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x):$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} - S_{n+p-1} v_{n+p} =$$

$$S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) = S_{n+p}(x) v_{n+p}(x) - S_n(x) v_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x) (v_k(x) - v_{k+1}(x))$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq |S_{n+p}(x)| \cdot |v_{n+p}(x)| + |S_n(x)| \cdot |v_{n+1}(x)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)| \cdot |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \leq$$

$$\leq M \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| + M |v_{n+p}(x)| + M |v_{n+1}(x)| < \varepsilon$$

Теорема 3: (2ой признак Абеля)

Пусть 1) $\sum u_n(x)$ сходится равномерно на X к $S(x)$;
 2) ФП $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обладает равномерно ограниченным на X умножением
 3) $v(x)$ -ограничена, т.е. $\exists M > 0: \forall n, \forall x \in X: |v_n(x)| \leq M$;
 Тогда ФР $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ сходится равномерно на X .

Доказательство:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x) (v_k(x) - v_{k+1}(x)) + (S_{n+p}(x) - S_n(x)) v_{n+p}(x) + S_n(x) \cdot (v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x))$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |S_k(x)| \cdot |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \cdot |v_{n+p}(x)| + |S_n(x)| \cdot |v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)|$$

$$\text{По условию } |S(x)| \leq M_1, |v(x)| \leq M \Rightarrow \exists N_1, \text{ т.ч. } \forall n \geq N_1: |S_n(x)| \leq M_1 + 1, |v_n(x)| \leq M + 1.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon), \text{ т.ч. } \forall n \geq N_2(\varepsilon), \forall x \in X: |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon/3(M_1 + 1), \text{ (крит. Коши)}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon), \text{ т.ч. } \forall n \geq N_3(\varepsilon), \forall x \in X: \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \varepsilon/3(M + 1), \text{ (равн. с.с.тб)}$$

$$\Rightarrow |v_{n+p}(x) - v_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \varepsilon/3(M + 1)$$

$$\exists N(\varepsilon) = \max \{N_1, N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\}. \text{ Тогда } \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in X: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| < \varepsilon$$

Ряд сходится по критерию Коши.

Теорема 4 (признак Дирихле-Абеля)

Пусть 1) частичные суммы $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно ограничены на X ;
 2) ФП $\{v_n(x)\}$ не возрастает и $\{v_n(x)\} \xrightarrow{x} f(x) = 0$;
 Тогда ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x)$ с.с.с. равномерно на X

Доказательство:

Не возрастающая на X $\{v_n(x)\}$, что $\{v_n(x)\} \xrightarrow{x} 0$ является ограниченным умножением, т.к.: $S_n(x) = v_1(x) - v_{n+1}(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_1(x) - v_{n+1}(x)) = v_1(x)$$

* $\{f_n(x)\}$ с равномерно огранич. умножением, если $\sum_{k=1}^{\infty} (v_{k+1}(x) - v_k(x))$ с.с.с. равномерно на X .

12. Признак Дини равномерной сходимости функциональных рядов и последовательностей. Почленный переход к пределу, непрерывность предельной функции функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 1 (признак Дини): ^{монотонная}

- 1) $\{f_n(x)\}$ — непрерывная и непрерывная на X последовательность;
- 2) $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$, т.е. $\{f_n(x)\}$ сходится на X к $f(x)$;
- 3) $f(x)$ — непрерывная на X ф-ция;
- 4) X — замкнутое и ограниченное мн-во (компакт);

Тогда сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ равномерна на X .

Доказательство:

$\Gamma_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Посл-ть $\{\Gamma_n(x)\}$: $\Gamma_n(x) \geq 0$ и непр-на на X , $\{\Gamma_n(x)\}$ не возрастает на X и $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n = 0$.
 $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\nexists$ такого n , что $\Gamma_n(x) < \varepsilon \quad \forall x \in X$. Это есть $\forall n \exists m. x_n \in X$, что $\Gamma_n(x_n) \geq \varepsilon$.
 Мн-во X ограничено $\Rightarrow$ по м-е Больцано-Вейерштрасса из $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпослед-ть $\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0$, где $x_0 \in X$.
 $\Gamma_m(x)$ непрерывна в т. $x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_m(x_{n_k}) = \Gamma_m(x_0)$
 $\forall n_k > m$: $\Gamma_m(x_{n_k}) \geq \Gamma_{n_k}(x_{n_k})$ (посл-ть $\Gamma_m(x)$ не возрастает) $\Rightarrow \Gamma_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon$
 $\Rightarrow \forall m$: $\Gamma_m(x_0) \geq \varepsilon$. Противоречие сходимости $\{\Gamma_m(x)\}$ в т. x_0 к нулю.
 Значит, что $\forall \varepsilon > 0 \exists$ хотя бы один номер n , т.ч. $\Gamma_n(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in X$.

Теорема 1*:

- 1) ряд сходится на X к $S(x)$, где $S(x)$ непрерывна на X ;
- 2) $u_n(x)$ непрерывны и неотрицательны на $X, \forall n$;
- 3) X — компакт ($X = [a, b], X \subset \mathbb{R}^m$), т.е. замкн. и огр.;

Тогда ряд сходится равномерно на X .
 (Эквивалентная формулировка в терминах ФР)

Теорема 2:

[Пусть $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к $f(x)$ на X , $x=a$ — предельная точка для X .
 Если $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = v_n$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, который также существует.]

Следствие:

[Если $\{f_n(x)\} \xrightarrow{x} f(x)$, все $f_n(x)$ непрерывны в т.а на $X \Rightarrow f(x)$ непрерывна в т.а.]

Теорема 3:

[Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ — сходится равномерно на X и $\exists \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = v_n \quad \forall n$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$]

Доказательство:

1. Докажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится.

В силу критерия Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, т.ч. $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$: $|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$.

Перейдем к пределу при $x \rightarrow a$: $|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k| \leq \varepsilon_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится.

2. $\forall N$: $|S(x) - \sum_{k=1}^N v_k| = |\sum_{k=1}^N u_k(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^N v_k - \sum_{k=N+1}^{\infty} v_k| \leq |\sum_{k=1}^N (u_k(x) - v_k)| + |\sum_{k=N+1}^{\infty} v_k| + |\sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x)|$

• $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$: $|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k| < \varepsilon/3, |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \varepsilon/3, \quad \forall x \in X$. Перейдем к $\lim_{p \rightarrow \infty}$

• $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta: |u_1(x) - v_1| < \varepsilon/3N, \dots, |u_N(x) - v_N| < \varepsilon/3N \Rightarrow$

$\Rightarrow |\sum_{k=1}^N u_k(x) - \sum_{k=1}^N v_k| < \varepsilon/3$

$\Rightarrow |S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} v_k| < \varepsilon/3 \cdot 3 = \varepsilon$

13. Почленное дифференцирование, существование первообразных функций для функциональных последовательностей и рядов.

$f(x)$ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМА на $[a, b]$, если $\forall x_0 \in (a, b) \exists f'(x_0)$, в $x=a \exists f'_+(a)$, $x=b \exists f'_-(b)$

Теорема 1:

Пусть $f_n(x)$ дифференцируема, $\{f'_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ и пусть $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$, причем $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x), \forall x \in X$

Доказательство:

1. Докажем, что $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$.

Известно, что $\{f_n(x_0)\} \rightarrow f(x_0)$ и из равномерной сходимости $\{f'_n(x)\}$ на $[a, b]$ (критерий Коши):

• $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, т.е. $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon/2, |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon/2(b-a)$;

• $(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)) = (f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi))(x - x_0)$ ($\xi \in (x, x_0)$)

$\Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2(b-a) \cdot (b-a) = \varepsilon$ — теорема Лагранжа

2. Фиксируем $\forall x \in [a, b]$:

$\varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x}$ определена: а) $x \in (a, b), \Delta x: |\Delta x| \leq \min(x-a, x-b), \Delta x \neq 0$
б) $x=a, \Delta x \in (0, b-a]$
в) $x=b, \Delta x \in [a-b, 0)$

Докажем, что $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ сходится равномерно на указанных интервалах $\{\Delta x\}$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$, т.е. $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon$ ($\forall x \in [a, b]$). — теорема Лагранжа

$\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x) = \frac{f_{n+p}(x+\Delta x) - f_{n+p}(x)}{\Delta x} - \frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} = f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi), \xi = x + \theta \Delta x$

$\Rightarrow |\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x)| = |f'_{n+p}(x + \theta \Delta x) - f'_n(x + \theta \Delta x)| < \varepsilon$, т.е. $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ сходятся равн. на Δx .

По теореме о поточном переходе в м. $\Delta x = 0$: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\Delta x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi_n(\Delta x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$

Теорема 2:

Пусть $f_n(x)$ имеет первообразную на $[a, b]$ и $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$. Тогда $f(x)$ также имеет первообразную на $[a, b]$.

Доказательство:

Пусть $F_n(x)$ — первообразная от $f_n(x)$.

Рассмотрим $\{F_n(x) - F_n(x_0)\}$: $F'_n(x) = f_n(x) \Rightarrow f(x)$;

$F_n(x_0) - F_n(x_0) \equiv 0$ сходится. В силу теоремы 1 $\frac{d}{dx}[F_n(x) - F_n(x_0)] \rightarrow f(x)$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(x) - F_n(x_0))$ — первообразная для $f(x)$.

Теорема 3 (1'):

Пусть $u_k(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, а сами ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на $[a, b]$ и $S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$.

14. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов (две теоремы). Сходимость в среднем, связь с равномерной сходимостью.

Теорема 1:

1) $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$;
 2) каждая $f_n(x)$ интегрируема на $[a, b]$;
 Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Доказательство:

- Докажем, что $f(x) \in R[a, b]$ (т.е. интегрируема на $[a, b]$)
- Вспользуемся леммой Дарбу: $f(x) \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение $[a, b]$: $\bar{S}(f) - \underline{S}(f) < \varepsilon$
 $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$
 $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \Rightarrow \bar{S}(f) - \underline{S}(f) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$, где $M_k - m_k = \omega_k(f)$ — колебание f на $[x_{k-1}, x_k]$
- Пл.к $f_n(x) \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \exists$ разбиение, что $\bar{S}(f_n) - \underline{S}(f_n) = \sum_{k=1}^n \omega_k(f_n) \Delta x_k < \varepsilon_1$ ($= \varepsilon/2$)
- Рассмотрим произвольное разбиение $[x_{k-1}, x_k]$ и $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$
 $f(x') - f(x'') = (f(x') - f_n(x')) + (f_n(x') - f_n(x'')) + (f_n(x'') - f(x'')) \Rightarrow$
 $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')|$
 Вспомог. $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$: где $\varepsilon > 0 \exists N_0$, м.з $\forall n \geq N_0: |f(x') - f_n(x')| < \varepsilon/4(b-a)$
 $\Rightarrow \forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]: |f(x') - f(x'')| < \varepsilon/2(b-a) + \omega_k(f_n) \Rightarrow \omega_k(f) < \varepsilon/2(b-a) + \omega_k(f_n)$
- $\bar{S}(f) - \underline{S}(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k < \sum_{k=1}^n (\varepsilon/2(b-a) + \omega_k(f_n)) \Delta x_k = \varepsilon/2 + (\bar{S}(f_n) - \underline{S}(f_n)) < \varepsilon/2 + \varepsilon_1 < \varepsilon$
- $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, м.з $\forall x \in [a, b], \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
 $\Rightarrow -\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon(b-a) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon(b-a) \cdot \int_a^b dx = \varepsilon$

Теорема 2:

1) ФР $\sum u_k(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на $[a, b]$
 2) каждая $u_k(x)$ интегрируема на $[a, b]$
 Тогда $S(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\sum \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b S(x) dx$

$f(x), f_n(x) \in R[a, b]$

Определение: $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$ (*)

Утверждение: Если $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $[a, b] \Rightarrow \{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$.

Доказательство:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, м.з $\forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2(b-a) = \varepsilon_1$

1) Из сходимости в среднем не следует равномерная сходимость

$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2(\pi n x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$, $f_n(\frac{1}{2n}) = 1: f_n(x) \rightarrow f(x) \equiv 0$ $[0, 1]$
 $f_n(x) \not\Rightarrow f(x)$

$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^{1/n} \sin^4(\pi n x) dx \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$, м.е она с-ца в среднем на $[0, 1]$

2) Из сходимости в среднем не следует сходимость хотя бы в 1 точке

$I_1 = [0, 1], I_2 = [0, \frac{1}{2}], I_3 = [\frac{1}{2}, 1], I_4 = [0, \frac{1}{4}], I_5 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \dots, I_{2^n} = [0, \frac{1}{2^n}], \dots$

$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_n \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus I_n \end{cases}$ $|I_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$
 $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{I_n} 1 dx = |I_n| \rightarrow 0 \Rightarrow \{f_n(x)\}$ с-ца к $f(x) = 0$ в среднем

Какую бы точку не фиксировали, найдутся такие n , что $x_0 \in I_n$ и $x_0 \notin I_n \Rightarrow$ пос-ть $f_n(x_0)$ содержит бесконечно много членов, равных 1 и 0 $\Rightarrow$ пос-ть расходится

[Если $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx, n \rightarrow \infty$]

Доказательство:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, м.з $\forall n \geq N: \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2/(b-a)$

$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b 1 dx}$ (т.к. $|(f, g)| \leq (f, f)(g, g)$)

15. Теорема Арцелла. Признак равностепенной непрерывности функциональной последовательности.

Определение: $\{f_n(x)\}$ — равностепенно непрерывна на $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, т.ч. $\forall x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$

Теорема 1 (Арцелла):

Если $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена на $[a, b] \Rightarrow$ из неё можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[a, b]$.

Доказательство:

1. Сформируем специальную последовательность точек на $[a, b]$:

где $\forall \delta > 0$ найдется номер n_0 , что на $\forall$ сегменте $[a, b]$ длины δ лежит хотя бы одна из $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$.

2. Рассмотрим $\{f_n(x)\}$ в точке $x = x_1$: получим ограниченную $\{f_n(x_1)\}$.

По т. Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_1}(x_1)\}$

Рассмотрим функции последовательности $\{f_{n_1}(x)\}$ в т. $x = x_2$. Получим $\{f_{n_1}(x_2)\}$.

По т. Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_2}(x_2)\}$

Продолжаем аналогичные рассуждения для точек $x_3, x_4, \dots$

$f_{11}(x), f_{21}(x), \dots, f_{n_1}(x) \dots \leftarrow$ с.с. в т. x_1

$f_{12}(x), f_{22}(x), \dots, f_{n_2}(x) \dots \leftarrow$ с.с. в т. x_1 и x_2

...

$f_{1m}(x), f_{2m}(x), \dots, f_{nm}(x) \dots \leftarrow$ с.с. в т. $x_1, x_2, \dots, x_m$

3. Рассмотрим теперь "диагональную" последовательность $f_{11}(x), f_{22}(x), \dots, f_{nn}(x), \dots$

Эта последовательность сходится во всех точках: $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, \dots$

Действительно, $x = x_m$: $f_{1m}(x_m), f_{2m}(x_m), \dots$. В строке n_m нашей матрицы есть строка $f_{1m}(x), \dots, f_{nm}(x), \dots$, которая сходится. "Диагональная" — её подпоследовательность.

4. Докажем, что эта последовательность равномерно сходится на $[a, b]$. $f_{nn}(x) = F_n(x)$.

1) В силу равност. непр-ти: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall x, x', x'' \in [a, b]: |x - x'| < \delta \Rightarrow |F_n(x) - F_n(x')| < \varepsilon/3$

2) По найденному δ укажем $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall$ отрезок длины δ содержит хотя бы одну т. $x_1, \dots, x_{n_0}$.

3) Последовательности $\{F_n(x_1)\}, \{F_n(x_2)\}, \dots, \{F_n(x_0)\}$ сходятся

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, k), \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b]: |F_{n+p}(x_k) - F_n(x_k)| < \varepsilon/3$ (Критерий Коши)

Пусть $N^* = \max(N(\varepsilon, 1), \dots, N(\varepsilon, k))$. Тогда $\forall n \geq N^*, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b]: |F_{n+p}(x) - F_n(x)| =$

$= |F_{n+p}(x) - F_n(x) + F_{n+p}(x_k) - F_{n+p}(x_k) + F_n(x_k) - F_n(x_k)| \leq |F_{n+p}(x) - F_{n+p}(x_k)| + |F_n(x) - F_n(x_k)| + |F_{n+p}(x_k) - F_n(x_k)| < \varepsilon$

Замечание: если $\{f_n(x)\}$ равн. непр-на на $[a, b]$ и ограничена лишь в одной точке ($x = x_0, |f_n(x_0)| \leq M, \forall n$), то эта последовательность равн-но ограничена на $[a, b]$.

Достаточный признак равностепенной непрерывности:

Если $\{f_n(x)\}$ состоит из дифференцируемых на $[a, b]$ ф-ий и $\{f'_n(x)\}$ равномерно ограничена на $[a, b] \Rightarrow \{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство:

$\xi_n \in (x', x''): |f_n(x') - f_n(x'')| = |f'_n(\xi_n)| |x' - x''|$

$|f'_n(\xi_n)| \leq A$ (т.к. $\{f'_n(x)\}$ равн-но орг.) $\Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| \leq A \cdot |x' - x''|$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon/A$, что $\forall x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$

16. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды.

Определение: Степенной ряд: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $\{a_n\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$
 ! Степенной ряд всегда сходится в своем центре: $x=x_0$.

В дальнейшем считаем, что $x_0=0$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1)
 Рассмотрим $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$. Если она ограничена сверху, то $\exists \lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Теорема 1 (Коши-Адамара):

I. Если $L=+\infty$, то (1) сходится лишь в точке $x=0$.
 II. Если $0 < L < +\infty$, то (1) сходится при $x \in (-1/L, 1/L)$
 и расходится при $|x| > 1/L$
 III. Если $L=0$, то (1) сходится при $\forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательства:

I. Пусть посл-ть $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ не ограничена, т.е. $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$. Тогда при $x \neq 0$ посл-ть $|x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$ также ограничена. Значит, $\exists N$, что $\forall n \geq N$: $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ или $|a_n x^n| > 1$. Это значит, что для всех $x \neq 0$ нарушено необходимое условие сходимости, т.е. ряд расходится при $x \neq 0$.

II. Пусть $\forall x: |x| < 1/L \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: |x| < 1/(L+\varepsilon)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \Rightarrow$ начиная с некоторого номера N : $\sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon/2 \Rightarrow \frac{1}{|x|} > \frac{1}{L+\varepsilon/2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow |a_n x^n| \leq (L + \varepsilon/2)^n \cdot \frac{1}{(L + \varepsilon/2)^n} = 1$

• Пусть $\forall x: |x| > 1/L \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: |x| > 1/(L-\varepsilon)$

Рассмотрим подпослед-ть $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow L \Rightarrow$ начиная с некоторого номера:
 $L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon$.

$|a_{n_k} x^{n_k}| > (L - \varepsilon)^{n_k} / (L - \varepsilon)^{n_k} = 1 \Rightarrow$ не выполняется необходимое условие сходимости

III. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

Найдем номер N , что $\forall n \geq N$: $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|}$ ($x \neq 0$)

$\Rightarrow |a_n x^n| < \frac{1}{2^n |x|^n} \cdot |x|^n = \frac{1}{2^n}$ (признак Вейерштрасса).

Определение: $(-R, R)$ — интервал сходимости. $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{L}$ — радиус сходимости.

Лемма: $\forall r < R$ ряд $\sum a_n x^n$ равномерно сходит-ся на $[-r, r]$, т.е. при $|x| \leq r$.

По теореме 1 ряд $|a_0| + \sum |a_n| r^n$ сходит-ся абсолютно при $x=r$. Он является мажорантой и по признаку Вейерштрасса ряд сходит-ся равномерно на $[-r, r]$.

Теорема 2:

[Сумма степенного ряда внутри его промежутка сходимости]
 [является непрерывной функцией.]

Доказательство:

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, R — радиус сходимости. Фиксируем $\forall x$, т.е. $|x| < R$.

$\exists r: |x| < r < R \Rightarrow$ по лемме следует, что $S(x)$ непрерывна на $[-r, r]$
 $\Rightarrow S(x)$ непрерывна и в т.х.

Теорема 3:

[Если $R > 0$ - радиус сходимости, а $|x| < R$, то этот ряд можно почленно интегрировать на $[0, x]$. Полученный ряд имеет тот же R .]

Доказательство:

$\exists \tau$, т.ч. $|x| < \tau < R \Rightarrow$ по лемме ряд сх-ся равномерно на $[-\tau, \tau] \Rightarrow$ и на $[0, x]$. Значит, этот ряд можно почленно интегрировать на $[0, x]$.

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} x^n + \dots \quad R' = \frac{1}{L}, \quad L' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \Rightarrow R' = R$$

Теорема 4:

[Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно. Новый ряд имеет тот же R .]

Доказательство:

$\exists \tau$, т.ч. $|x| < \tau < R \Rightarrow$ по лемме ряд сх-ся равномерно на $[-\tau, \tau] \Rightarrow$ и на $[0, x]$. Значит, этот ряд можно почленно дифференцировать на $[0, x]$.

$$a_1 + 2a_2 x + \dots + (n+1)a_{n+1} x^n \quad R' = \frac{1}{L}, \quad L' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \Rightarrow R = R'$$

Определение: $f(x)$ на $(-R, R)$ может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на X .

1. Чтобы ф-ия $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд на $(-R, R)$, необходимо, чтобы эта ф-ия имела на X непрерывные производные любого порядка.
(следствие из т. 4)

2. Коэффициенты разложения находятся однозначно.

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad f(0) = a_0, \quad f'(x) = \sum n a_n x^{n-1} \Rightarrow f'(0) = a_1 \dots f^{(n)} = n \cdot a_n$$

Получим образом $a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0), \quad \forall n$

Для разложимой на $(-R, R)$ ф-ии $f(x)$ её степенной ряд - её ряд Тейлора в т. 0.

17. Определение и доказательство существования двойного интеграла при помощи прямоугольных разбиений области. Классы интегрируемых функций. Основные свойства двойных рядов.

Рассмотрим произвольную ф-ию $u = f(x, y)$, определенную всюду на прямоугольнике $R = [a \leq x \leq b] \times [c \leq y \leq d]$.

- Разбиение T прямоугольника R горизонтальными и вертикальными линиями $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \Rightarrow R = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{l=1}^m R_{kl}$
 $R_{kl} = \{x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \times \{y_{l-1} \leq y \leq y_l\}$. $\Delta R_{kl} = \Delta x_k \cdot \Delta y_l$. $(\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$.
- Интегральная сумма: $G = G(f, T) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(\xi_k, \eta_l) \cdot \Delta R_{kl}$
 d_{kl} - диаметр R_{kl} . $d = \max d_{kl}$ - диаметр разбиения T .
- Предел интегральной суммы: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, что при $d < \delta$, $\forall (\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}: |G - I| < \varepsilon$

Определение: Ф-ия $f(x, y)$ интегрируема по Риману на R , если существует конечный предел I интегральных сумм этой ф-ии при $d \rightarrow 0$.

Указанный предел - двойной интеграл: $I = \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(M) d\sigma$

Замечание: если $f(x, y)$ интегрируема на R , то $f(x, y)$ ограничена на R .

Верхние и нижние суммы Дарбу: $\underline{S}(f, T) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m m_{kl} \cdot \Delta R_{kl}$, $\overline{S}(f, T) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m M_{kl} \cdot \Delta R_{kl}$

Суммы Дарбу обладают свойствами:

- $\underline{S}(f, T) \leq G(f, T) \leq \overline{S}(f, T)$, $\forall T, \forall (\xi_k, \eta_l)$
- $\forall$ разбиение $T, \forall \varepsilon > 0 \exists (\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}, \forall k, l: 0 \leq G(f, T) - \underline{S}(f, T) < \varepsilon, 0 \leq \overline{S}(f, T) - G(f, T) < \varepsilon$
- Если разбиение T' получено из исходного дополнением горизонтальных/верт. линий разбиение (умельчение T), то $\underline{S}' \geq \underline{S}, \overline{S}' \leq \overline{S}$
- Если $\underline{S}'$ - нижняя сумма для T' , а $\overline{S}''$ - верхняя для T'' , то $\underline{S}' \leq \overline{S}''$
- $\exists \sup \underline{S}(f, T) = I_*$, $\exists \inf \overline{S}(f, T) = I^*$ - нижний/верхний интеграл Дарбу
- T' - умельчение T (добавлено p новых линий): (Δ - диаметр разбиения T)
 $\overline{S} - \overline{S}' \leq (M_R - m_R) p \cdot \Delta \cdot d$, $\underline{S}' - \underline{S} \leq (M_R - m_R) p \Delta d$
- При $d \rightarrow 0$: $\underline{S}(f, T) \rightarrow I_*$, $\overline{S}(f, T) \rightarrow I^*$
- Ф-ия $f(x, y)$ интегрируема на $R \Leftrightarrow I^* = I_*$ или $\forall \varepsilon > 0 \exists T: |\underline{S}(f, T) - \overline{S}(f, T)| < \varepsilon$.

Теорема 1:

[Если $u = f(x, y)$ непрерывна на R , то она интегрируема на ней]

Доказательство:

$$\overline{S}(f, T) - \underline{S}(f, T) = \sum (\max f(x, y) - \min f(x, y)) \cdot \Delta R_{kl}$$

В силу равномерной непрерывности $f(x, y)$ на R : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: |x_k - x_{k-1}| < \delta, |y_l - y_{l-1}| < \delta \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\max f(x, y) - \min f(x, y)| < \varepsilon$ - колебание $f(x, y)$ на $R_{kl} \Rightarrow \overline{S}(f, T) - \underline{S}(f, T) < \varepsilon \cdot \Delta R$ - площадь R

Определение: элементарная фигура Q - объединение конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям Ox и Oy .

Определение: класс функций, обладающих I-свойством:

- $f(x, y)$ определен на $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ($\mathcal{D}$ - произвольная замкнутая область)
- непрерывна на $\mathcal{D}$, за исключением, быть может, мн-ва $\mathcal{D}_0$, которое таково, что:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists$ элементарная фигура $Q \supset \mathcal{D}_0$, площадь $Q < \varepsilon$.

Теорема 2:

[Если $f(x,y)$ обладает I-свойствами в R , то она интегрируема на R и $f(x,y)$ ограничена.]

Доказательство:

Рассмотрим произвольное разбиение R на части $R = \cup R_{k\ell}$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $M_0 > 0 : |f(x,y)| \leq M_0, (x,y) \in R$.

1) Накроем лн-во точек разбиения $\mathcal{D}_0$ элементарной фигурой Q площади $< \frac{\varepsilon}{2M_0}$. Тем самым, по исходному разбиению R получено новое разбиение, элементарная фигура $Q \supset \mathcal{D}_0$ — объединение прямоугольников нового разбиения — оно уменьшение исходного.

2) Рассмотрим суммы Дарбу для исходного и нового: $\underline{\Sigma}(f) \leq \underline{\Sigma}(f), \bar{\Sigma}(f) \leq \bar{\Sigma}(f)$. Разница между суммами в каждом неравенстве оцениваем через величину, пропорциональную диаметру исходного разбиения:

$$\bar{\Sigma} - \underline{\Sigma} = \sum (M_{k\ell} - m_{k\ell}) \Delta R_{k\ell} = \sum_{\substack{UR_{k\ell} \\ \text{в } R_{k\ell}}} (M_{k\ell} - m_{k\ell}) \Delta R_{k\ell} + \sum_{\substack{OR_{k\ell} \\ \text{в } Q}} (M_{k\ell} - m_{k\ell}) \cdot \Delta R_{k\ell} <$$

Сумма с одним штрихом: частичные сегменты из фигур, покрывающих разбиение.

С двумя — остальные (за счет равн. кепр-ти $f(x,y)$ на $R \setminus Q$)

$$< M_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_0} + \frac{\varepsilon}{2|R|} \cdot |R| = \varepsilon$$

$\mathcal{D}$ -ограничена, замкнута, её граница $\partial \mathcal{D}$ имеет площадь нуль. Задача $u = f(x,y)$ на $\mathcal{D}$. Рассмотрим прямоугольник $R \supset \mathcal{D}$.
$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in \mathcal{D} \\ 0, & (x,y) \in R \setminus \mathcal{D} \end{cases}$$

Определение: $f(x,y)$ интегрируема на $\mathcal{D}$, если $F(x,y)$ инт-ма на R и $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) dx dy \stackrel{I}{=} \iint_R F(x,y) dx dy$

Замечание: $\iint_{\mathcal{D}} 1 dx dy$ — площадь $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ квадратуема)

Теорема 3:

[Если $f(x,y)$ непрерывна на $\mathcal{D} \Rightarrow f(x,y)$ интегрируема по $\mathcal{D}$]

Доказательство:

$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in \mathcal{D} \\ 0, & (x,y) \in R \setminus \mathcal{D} \end{cases}$ $F(x,y)$ непрерывна во всех точках R за исключением, быть может, точек $\partial \mathcal{D} \Rightarrow F(x,y)$ либо непр-на на R , либо обладает I-свойствами на $R \Rightarrow \exists \iint_R F(x,y) dx dy$

Теорема 4:

[$f(x,y)$ обладает I-свойствами на $\mathcal{D} \Rightarrow f(x,y)$ интегрируема на $\mathcal{D}$]

Доказательство:

$F(x,y)$ также обладает I-свойствами на $\mathcal{D} \Rightarrow \exists \iint_R F(x,y) dx dy$

Следствие 1:

[Если $f(x,y)$ непрерывна на $\mathcal{D}$ за исключением, быть может, конечного числа точек и/или спрямляемых кривых $\Rightarrow$ она интегрируема на $\mathcal{D}$.]

Следствие 2:

[Если $f(x,y)$ интегрируема на $\mathcal{D}$, а $g(x,y) = f(x,y)$ в $\mathcal{D}$ за исключением некоторого лн-ва $\mathcal{D}_0$ площади нуль, то $g(x,y)$ интегрируема на $\mathcal{D}$ и
$$\iint_{\mathcal{D}} g(x,y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y) dx dy$$
]

Основные свойства двойного интеграла:

1° Аддитивность

Пусть $f(x,y) \in R(D)$ и D разбита на 2 части $D = D_1 \cup D_2$ с помощью кривой Γ площади нуля. Тогда $f \in R(D_1)$, $f \in R(D_2)$ и $\iint_D f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy$

Доказательство:

Рассмотрим разбиение $D = \bigcup_{k=1}^N \tilde{D}_k$. Добавим к D кривую $\Gamma \Rightarrow$ получим новое разбиение D и еще два: D_1 и D_2 .

Составим суммы Дарбу: $\bar{S}, \underline{s}$ для D , $\bar{S}_1, \underline{s}_1$ для D_1 , $\bar{S}_2, \underline{s}_2$ для D_2 : $\bar{S}_1 - \underline{s}_1 \leq \bar{S} - \underline{s}$.

Если разбиение области D таково, что $\bar{S} - \underline{s} < \varepsilon$, то $\bar{S}_1 - \underline{s}_1 < \varepsilon \Rightarrow f \in R(D_1)$.

Аналогично $f \in R(D_2)$. $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$, $\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 \Rightarrow$ равенство для интегралов

2° Линейность

Если $f, g \in R(D)$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha f + \beta g \in R(D)$ и $\iint (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint f dx dy + \beta \iint g dx dy$

Доказательство:

$$G = \sum (\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)) |\Delta i| = \alpha \sum f(\xi_i, \eta_i) |\Delta i| + \beta \sum g(\xi_i, \eta_i) |\Delta i|$$

3° Если $f(x,y) \in R(D)$, то $f^2(x,y) \in R(D)$. f, φ : $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq C \cdot |t_2 - t_1| \Rightarrow \varphi(t)$, $\varphi(t) = t^2$

4° Если $f(x,y), g(x,y) \in R(D) \Rightarrow f(x,y) \cdot g(x,y) \in R(D)$

$$(f \cdot g)^2 = \frac{1}{4} ((f+g)^2 - (f-g)^2)$$

5° Если $f, g \in R(D)$ и $f(x,y) \leq g(x,y)$ на $D \Rightarrow \iint f(x,y) dx dy \leq \iint g(x,y) dx dy$

6° Если $f(x,y) \in R(D)$, то $|f(x,y)| \in R(D)$ и $|\iint f(x,y) dx dy| \leq \iint |f| dx dy$
 $||A| - |B|| \leq |A - B|, -|f| \leq f \leq |f|$

7° $f, g \in R(D)$, $g(x,y) \geq 0$ на D . Тогда $\iint f g dx dy = \mu \iint g dx dy$, $\inf f \leq \mu \leq \sup f$
Если f непрерывна на D , то $\mu = f(\xi, \eta)$, где $(\xi, \eta) \in D$.

18. Определение двойного интеграла при помощи произвольных разбиений области.
Эквивалентность двух определений.

D -замкнутая и ограниченная область с границей ∂D площади ноль.
Разобьем D при помощи конечного числа произвольных кривых площади ноль на конечное число замкнутых областей: $D = \bigcup D_k$.
Каждая D_k имеет границу площади ноль $\Rightarrow$ квадратируема, $|D_k|$ -площадь.

Определение:

Диаметр области D_k : $d_k = \sup_{M_1, M_2 \in D_k} \rho(M_1, M_2)$ (ρ -расстояние)

Интегральная сумма: $\tilde{G} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot |D_k|$, соотв. данному разбиению

Предел интегральных сумм I : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $\forall$ разбиения $D = \bigcup D_k$ диаметра $d = \max d_k < \delta$, при $\forall$ выборе (ξ_k, η_k) , $k = \overline{1, n}$: $|\tilde{G}(f) - I| < \varepsilon$

* Функция $f(x, y)$ интегрируема в области D , если существует конечный предел I интегральных сумм при $d \rightarrow 0$.

** $f(x, y)$ интегрируема на D , если $F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$ интегрируема

Теорема 1:

[Определение * эквивалентно определению **.]

Доказательство:

1) $(* \Rightarrow **)$: Замкнем D в прямоугольнике R , разобьем на частичные прямоугольники и введем $F(x, y)$. $\tilde{G}$ и $\tilde{G}^*$ отличаются лишь слагаемыми соотв. частичных прямоугольников, граничащих с ∂D .

Площадь $\partial D = 0$, $f(x, y)$ ограничена $\Rightarrow$ интегрируема, имея дв. инт-л I .

2) $(** \Rightarrow *)$: Рассмотрим произвольное разбиение $D = \bigcup D_k$ и введем суммы Дарбу: $\tilde{S}^*(f) = \sum M_k^* |D_k|$, $\tilde{S}^*(f) = \sum m_k^* |D_k|$, $\tilde{S}^*(f) \leq \tilde{G}^*(f) \leq \tilde{S}^*(f)$

П.к $f(x, y)$ интегрируема на D в силу определения, то $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение прямоугольника $R \supset D$ на части с диаметрами $< \delta$: $\tilde{S}^*(f) - \tilde{S}^*(f) < \varepsilon$, $\sum_{R_k \cap \partial D \neq \emptyset} |R_k| < \varepsilon / 4M_0$

Рассмотрим отрезки прямых разбиения внутри R и границу ∂D

$\Rightarrow$ существует фигура Q , накрывающая это мн-во и имеющая площадь $< \varepsilon / 4M_0$, где $M_0 = \sup_{(x, y) \in D} |f(x, y)|$

На Q введем величину $\delta_0 > 0$: δ_0 -инфиним расстояний от ∂Q до того множества площади ноль, которое она накрывает.

Рассмотрим произвольное разбиение $D = \bigcup D_k$ с диаметром разбиения $< \delta_0$. $\sup_{(x, y) \in R_k} f(x, y)$

$$\tilde{S}^*(f) = \sum_{i: D_i \subset R_i} M_i^* |D_i| + \sum_{D_i \cap \partial D \neq \emptyset} M_i^* |D_i| < \sum_{i: D_i \subset R_i} M_i^* |D_i| + \varepsilon/4 = \varepsilon/4 + \sum_{k=1}^n \sum_{i: D_i \subset R_k} M_i^* |D_i| = \{M_i \leq M_k\} \textcircled{\leq}$$

Σ'' : области D_i , каждая из которых не лежит полностью в частичном прямоугольнике разбиения T , т.е. $D_i \subset Q \Rightarrow$ общая сумма таких площадей $< \varepsilon / 4M_0$

$$\textcircled{\leq} \varepsilon/4 + \sum_k M_k \sum_{i: D_i \subset R_k} |D_i| = \varepsilon/4 + \sum_k M_k \cdot |R_k| - \sum_k M_k \cdot |\underbrace{R_k \setminus \bigcup D_i}_{\leq M_0 |Q|}| < \varepsilon/2 + \tilde{S}^*(f)$$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad \quad}^{\varepsilon/2} \quad \overbrace{\quad \quad}^{\varepsilon/2} \quad \overbrace{\quad \quad}^{\varepsilon/2} \\ \tilde{S}^*(f) \quad \tilde{S}^*(f) \quad I \quad \tilde{S}^*(f) \quad \tilde{S}^*(f) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \tilde{S}^*(f) < \tilde{S}^*(f) + \varepsilon/2 \\ \tilde{S}^*(f) > \tilde{S}^*(f) - \varepsilon/2 \end{array} \right\} \quad \tilde{S}^*(f) - \tilde{S}^*(f) < \frac{3\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| \tilde{S}^*(f) - I \right| < \varepsilon$$

$$|\tilde{S}^*(f) - I| < \varepsilon$$

19. Сведение двойного интеграла к повторному однократному.

1° Случай: D - прямоугольник

Теорема 1:

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y) \in R(D) \text{ и } \forall x \in [a,b] \exists \int_a^d f(x,y) dy = I(x). \\ \text{Тогда } I(x) \text{ интегрируема на } [a,b] \text{ и } \iint_D f dx dy = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_a^d f(x,y) dy \end{array} \right]$$

Доказательство:

Рассмотрим любое разбиение D на p частичных прямоугольников: $D = \bigcup_{k=1}^p R_{k\ell}$
 Возьмем $\forall (x,y) \in R_{k\ell}$: $m_{k\ell} \leq f(x,y) \leq M_{k\ell}$, где $m_{k\ell} = \inf_{R_{k\ell}} f(x,y)$, $M_{k\ell} = \sup_{R_{k\ell}} f(x,y)$

Фиксируем произвольную $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и интегрируем по y от $y_{\ell-1}$ до y_ℓ .

$$m_{k\ell} \Delta y_\ell \leq \int_{y_{\ell-1}}^{y_\ell} f(\xi_k, y) dy \leq M_{k\ell} \Delta y_\ell$$

$$\text{Суммируем по } \ell: \sum_{\ell=1}^p m_{k\ell} \Delta y_\ell \leq \int_{y_0}^d f(\xi_k, y) dy \leq \sum_{\ell=1}^p M_{k\ell} \Delta y_\ell$$

$$\text{Умножим на } \Delta x_k \text{ и суммируем по } k: \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^p m_{k\ell} \Delta y_\ell \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n I(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^p M_{k\ell} \Delta y_\ell \Delta x_k$$

$$\text{При } d \rightarrow 0: \underline{S}(f) \leq G(I) \leq \bar{S}(f) \Rightarrow \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_a^d f(x,y) dy$$

2° Случай произвольной области D .

Теорема 2:

$$\left[\begin{array}{l} 1) \text{ область } D \text{ - простая, т.е. любая прямая } x=x_0 \text{ пересекает } D \text{ либо по} \\ \text{отрезку, либо в одной точке, либо не пересекает вообще} \\ 2) f(x,y) \in R(D) \text{ и для } \forall x \in [a,b] \exists I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy \\ \text{Тогда } I(x) \text{ интегрируема на } [a,b] \text{ и } \iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b I(x) dx \end{array} \right]$$

Доказательство:

$$R = [a \leq x \leq b] \times [c \leq y \leq d] \text{ такой, что } D \subset R. \quad F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_D f dx dy &= \iint_R F(x,y) dx dy \rightarrow \int_a^b \int_{c_0}^{d_0} F(x,y) dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy = \int_a^b I(x) dx \\ \Rightarrow \int_a^b dx \int_{c_0}^{d_0} F dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f dy \quad (\text{сводится к т. 1}) \end{aligned}$$

Замечание: Случай общих областей часто сводится к случаю простых областей, используя свойство аддитивности.

20. Кратные несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сходимости.

D - открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$ ($\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in D \exists$ непрерывная кривая, их соединяющая, целиком лежащая в D), $\forall x \in D \exists U_\varepsilon(x) \subset D$ - окр-ть т. x : $\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \dots} < \varepsilon$.
 $\bar{D}$ - замыкание D , полученное присоединением к D его границы.

Определение: Последовательность $\{D_n\}$ открытых связных множеств монотонно исчерпывает множество D , если:

- 1) $\forall n: \bar{D}_n \subset D_{n+1}$
- 2) $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$ (т.е. $\forall x \in D \exists \bar{D}_n, \text{ т.ч. } x \in \bar{D}_n$)

Обозначение: $\{D_n\} \subset D$

Определение: Пусть на D задана ф-ия $f(x)$ такая, что для любого замкнутого множества $K \subset D$ существует $\int_K f(x) dx$. Будем рассматривать пос-ти $\{D_n\}$ открытых множеств, монотонно исчерпывающих D и такие, что $\bar{D}_n$ каждого из-ва D_n кубируемо.

Если для $\forall$ такой пос-ти $\{D_n\} \exists a_n = \int_{\bar{D}_n} f(x) dx$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, не зависящий от выбора пос-ти $\{D_n\}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{D}_n} f(x) dx$ - **НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**.

Теорема 1:

Для сходимости несобственного интеграла $\int f(x) dx$ от неотрицательной в области D ф-ии $f(x) \iff$ хотя бы для одной пос-ти $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающей D , числовая пос-ть $a_n = \int_{\bar{D}_n} f(x) dx$ была ограничена.

Доказательство:

$\Rightarrow$: по определению $\{a_n\}$ сходится для всех пос-тей областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих $D \Rightarrow \{a_n\}$ ограничена для каждой такой пос-ти $\{D_n\}$.

$\Leftarrow$: Известно, что $\exists \{D_m\} \subset D$: т.ч. a_m ограничена.

Поскольку $\bar{D}_m \subset D_{m+1} \subset \bar{D}_{m+1}$ и $f(x) \geq 0$, то $a_m \leq a_{m+1} \forall m$, т.е. $\{a_m\}$ монотонна $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = I$.

Рассмотрим любую другую $\{D'_n\} \subset D$ и покажем, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{D}'_n} f(x) dx = I$

Фиксируем любой номер n_0 и рассмотрим область $\{D'_{n_0}\}$. Найдется $n_1: \bar{D}'_{n_0} \subset D_{n_1}$. Пусть это не так. Тогда для $\forall k \exists M_k \in \bar{D}'_{n_0}$, т.ч. $M_k \notin D_k$. Из пос-ти $\{M_k\}$ можно выделить сходящуюся к $M \in \bar{D}'_{n_0}$ пос-ть. M вместе с окр-тью принадлежит одному из мн-в D_{k_1} . Но тогда они принадлежат и всем D_k с большими номерами принадлежат точки M_k , что противоречит выбору $M_k \Rightarrow \exists n_1$, т.ч. $\bar{D}'_{n_0} \subset D_{n_1} \subset \bar{D}_{n_1} \Rightarrow v_n \leq v_{n_1} \leq I$. Т.к. $\{v_n\}$ монотонно убывает, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = I'$. $I' \leq I$. Поменяем местами $\{v_n\}$ и $\{a_n\}$: $I \leq I' \Rightarrow I = I'$.

Теорема 2: (признак сходимости)

Пусть на D : $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда:

- 1) из сходимости $\int g(x) dx \Rightarrow$ сходимость $\int f(x) dx$
- 2) из расходимости $\int f(x) dx \Rightarrow$ расходимость $\int g(x) dx$

Доказательство:

$$a_n = \int_{\bar{D}_n} f(x) dx \leq \int_{\bar{D}_n} g(x) dx = b_n$$

$\Rightarrow$ из ограниченности $\{b_n\} \Rightarrow$ огранич. $\{a_n\}$, из монот. $\{a_n\} \Rightarrow$ монот. $\{b_n\}$. (для $\forall \{D_n\}$)

Отсюда по теореме 1 следует справедливость теоремы 2.

21. Кратные несобственные интегралы от знакопеременных функций.
Эквивалентность понятий сходимости и абсолютной сходимости.

Теорема 1:

[Для несобственных n -кратных интегралов при $n \geq 2$ понятие сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны.]

Доказательство:

1. Докажем, что если $\int_D |f(x)| dx$ сходится $\Rightarrow$ сходится и $\int_D f(x) dx$.

Рассмотрим две неотрицательные ф-ии: $f_+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$, $f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$

Представим их в виде:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}$$

Отметим, что $0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|$, $0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$, $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$

Пусть $\int_D |f(x)| dx$ сходится, тогда $\forall \{D_n\} \subset D$: $\exists \bar{D}_n \int |f(x)| dx$. И.е. $f(x)$ интегрируема на $\forall D_n$, то $\exists \bar{D}_n \int f(x) dx$. $f_+(x) \leq |f(x)|$, $f_-(x) \leq |f(x)| \Rightarrow$ по признаку сравнения $\exists \int f_{\pm}(x) dx$

Из определения несобств. интеграла следует, что если сходится интеграл $f_+(x)$ и $f_-(x)$ по области D , то сходится и интеграл от их суммы/разности, т.е. $\exists \int (f_+(x) - f_-(x)) dx$

2. Пусть сх-ца $\int_D f(x) dx$. Докажем, что он сходится абсолютно. От противного.

Тогда посыл-ть интегралов от $|f(x)|$ по $\forall \{D_n\} \subset D$ будет монотонно возрастающей бесконечно большой. $\exists \{D_n\} \subset D$, что $\bar{D}_n \int |f(x)| dx \rightarrow \infty$.

Из этой посыл-ти $\{D_n\}$ выбираем подпослед-ть так, чтобы: $\bar{D}_{n+1} \int |f(x)| dx \geq 3 \cdot \bar{D}_n \int |f(x)| dx + 2n + 4$

$P_n = D_{n+1} \setminus D_n$: $\bar{P}_n \int |f(x)| dx \geq 2 \cdot \bar{D}_n \int |f(x)| dx + 2n + 4$, $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$

• Фиксируем n , пусть для него большим будет $\bar{P}_n \int f_+(x) dx$

$\bar{P}_n \int |f(x)| dx = \bar{P}_n \int f_+(x) dx + \bar{P}_n \int f_-(x) dx \leq 2 \cdot \int f_+(x) dx \Rightarrow \bar{P}_n \int f_+(x) dx \geq \bar{D}_n \int |f(x)| dx + n + 2$

Разобьем область P_n на конечное число областей P_{nk} так, чтобы: $m_k = \inf_{P_{nk}} f_+(x)$

$0 \leq \bar{P}_n \int f_+(x) dx - \sum_k m_k |P_{nk}| < 1 \Rightarrow \sum_k m_k |P_{nk}| > \bar{D}_n \int |f(x)| dx + n + 1$

Так как $m_k \geq 0$, то оставим в сумме лишь $m_k > 0$. Новая область - $\tilde{P}_n$

В $\tilde{P}_n$ ф-ия $f_+(x) \geq 0 \Rightarrow f_+(x) = f(x) \Rightarrow \bar{P}_n \int f(x) dx > \bar{D}_n \int |f(x)| dx + n + 1$

$D_n^* = D_n \cup \tilde{P}_n$: $\bar{D}_n \int f(x) dx \geq \bar{D}_n \int |f(x)| dx$ складываем с $\nearrow$: $\bar{D}_n^* \int f(x) dx > n + 1$

(Если для фикс. n большим будет $\bar{P}_n \int f_-(x) dx$, тогда $\bar{D}_n \int f(x) dx < -n - 1$)

Построенная нами конструкция даёт "почти" посыл-ть $\{D_{2m}^*\} \subset D$, т.к. лб нарушена связность областей D_{2n}^* (связность D_n^* лб нарушена при переходе от P_n к $\tilde{P}_n$)

Соединим несвязные компоненты D_n^* с мин-вом D_n с помощью "узких каналов"

Число каналов конечно. Объединим их объединение как K_n . Напишем оц. на $V(K_n)$.

$|\bar{K}_n \int f(x) dx| \leq \bar{K}_n \int |f(x)| dx \leq M \cdot V(K_n)$, $M = \bar{P}_n \sup |f(x)|$. Пусть $V(K_n) < 1/M \Rightarrow |\bar{K}_n \int f(x) dx| < 1$

$\Rightarrow |\bar{D}_n^* \cup K_n \int f(x) dx| > n$ (*)

Последовательность связанных кубических областей $\{D_{2n}^* \cup K_{2n}\}$ монотонно исчерпывает область D . Из (*) следует, что посыл-ть интегралов в левой части этого неравенства расходится. Противоречие.

22. Криволинейные интегралы первого и второго рода.

Рассмотрим на Oxy некоторую спрямляемую кривую L , без точек самопересечения, параметрическую: $\begin{cases} x = \varphi(t), a < t < b, \forall t_1, t_2: (\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2)) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

Считаем, что на L заданы ф-ии: $f(x, y), P(x, y), Q(x, y)$, каждая из которых непрерывна вдоль этой кривой: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall M_1, M_2 \in L, \rho(M_1, M_2) < \delta: |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$

Разобьем $[a, b]$ на части: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. $t \in [t_{k-1}, t_k]: L_k$ -спрямляема.

Для каждой части рассмотрим промежуточную точку $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$
 $N_k(\xi_k, \eta_k), \xi_k = \varphi(\tau_k), \eta_k = \psi(\tau_k): N_k(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \in L$

$|L_k| = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$, диаметр $d = \max_k |L_k|$ - "малость" разбиения

Введем следующие интегральные суммы:

- 1) $G_1(f) = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot |L_k|$
- 2) $G_2(P) = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot (\varphi(\tau_k) - \varphi(\tau_{k-1}))$
- 3) $G_3(Q) = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot (\psi(\tau_k) - \psi(\tau_{k-1}))$

Определение: I -предел интегральных сумм G_s при спрямлении $d \rightarrow 0$:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ т.ч. $\forall$ разбиения L с $d < \delta$ и при $\forall$ выборе $N_k: |G_s - I| < \varepsilon$

- 1) Если $\exists$ предел G_1 при $d \rightarrow 0$: $\int f(x, y) dL$ - интеграл 1-го рода
- 2) Если $\exists$ предел G_2 при $d \rightarrow 0$: $\int P(x, y) dx$
- 3) Если $\exists$ предел G_3 при $d \rightarrow 0$: $\int Q(x, y) dy$

Общий криволиней. инт-л 2-го рода: $\int P(x, y) dx + \int Q(x, y) dy = \int (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$

Кривая L гладкая, если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на $[a, b]$ непрерывные $\varphi'(t), \psi'(t)$.
 Особые точки: $(\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2) = 0$ (обе производные обращаются в нуль)

Теорема 1:

Если кривая $L = AB$ - гладкая и не содержит особых точек, и если ф-ии $f(x, y), P(x, y), Q(x, y)$ непрерывны вдоль L , то:

- 1) $\int f(x, y) dL = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$
- 2) $\int P(x, y) dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$
- 3) $\int Q(x, y) dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t) dt$

Доказательство:

Пусть $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$, $|L_k| = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$, $\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt$

Получа: $G_1 = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$

$G_2 = \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt$

Пусть $I_1 = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$, $I_2 = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$

Получа: $G_1 - I_1 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$

$G_2 - I_2 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))) \cdot \varphi'(t) dt$

П.ч. $f(\varphi(t), \psi(t))$ и $P(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывны на $[a, b] \Rightarrow$ они равн-но непрерывны на $[a, b]$

1) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: где $\forall t, \tau_k$, т.ч. $|t - \tau_k| < \delta: |f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))| < \varepsilon / |L|$

$|G_1(f) - I_1| \leq \frac{\varepsilon}{|L|} \cdot \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \frac{\varepsilon}{|L|} \cdot |L| = \varepsilon$

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: где $\forall t, \tau_k$, т.ч. $|t - \tau_k| < \delta: |P(\varphi(t), \psi(t)) - P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))| < \varepsilon / M(b-a)$

$|G_2(P) - I_2| \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot \max_{a \leq t \leq b} |\varphi'(t)| \cdot (b-a) = \varepsilon$ ($M = \max_{a \leq t \leq b} |\varphi'(t)|$)

Замечание: 1) Обладают теми же св-вами (аддит., линейность, оценка 1.1, средн. знач.)

2) можно рассматривать и для кусочно-линейных ф-ий

3) $\int_{AB} P dx = \int_a^b P dx$, $\int_{AB} Q dy = - \int_{BA} Q dy$

23. Понятие поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности. Лемма о проекции окрестности точки на касательную плоскость.

- Отображение f области G на плоскости на мн-во G^* трехмерного пр-ва — **гомеоморфным**, если осуществляет взаимнооднозначное соответствие G и G^* .
- Отображение f области G на G^* — **локально гомеоморфное**, если у каждой точки G есть окрестность, которая гомеоморфно отображ. на свой образ.
- Область G на плоскости T — **элементарная**, если эта область является образом открытого круга D при гомеоморфном отображении D на T .
- Связная область G на плоскости T — **простая**, если $\forall$ точка G имеет окрестность, являющуюся элементарной областью.
- Мн-во точек Φ пространства — **поверхность**, если это мн-во является образом простой плоской области G при локально гомеоморфном отображении f области G в пространство $\mathbb{R}^3$.

Пусть на плоскости (u, v) задана простая область G и для всех точек этой области определены: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ или $r = r(u, v)$

$$A = \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1) \text{ гр-ны имеют в области } G \text{ непр-ые ЧП по } u \text{ и } v \\ 2) \text{ всюду в области } G \text{ } \text{rg} A = 2 \end{array}$$

Утверждение: при выполнении этих двух условий мн-во Φ точек, определяемых ур-ниями $r = r(u, v)$ представляют поверхность.

Доказательство:

$$\text{Пусть } \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Значит, в некоторой окрестности $\exists$ обратное отображение той точки, где минор $\neq 0$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ (т.е. с-ма имеет единственное непрерывное и дифференцируемое решение). Это обратное отображение непрерывно и непрерывно дифференцируемо в соотв. окрестности $\Rightarrow z = z(u(x, y), v(x, y))$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая гр-ная (x, y) в соответствующей окрестности.

Поверхность, определяемая ур-ниями $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ при выполнении условия 1) — **ладкая**.

Если же $\text{rg} A = 2$, то не имеющих особых точек.

Геометрический смысл матрицы A .

- Фиксируем $u = u_0$, тогда ур-ие $r = r(u_0, v)$ будет определять кривую на пов-ти Φ . Вектор $\frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v)$ — касательный к этой линии.

Если $v = v_0$, то $r = r(u, v_0)$ — определит другую координатную линию, а вектор $\frac{\partial r}{\partial u}(u, v_0)$ будет касательной к этой линии.

Через $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x = x(u_0, v_0)$, $y = y(u_0, v_0)$, $z = z(u_0, v_0)$ пройдут эти линии.

- $\text{rg} A = 2$ (условие отсутствия особых точек), говорит о том, что $\frac{\partial r}{\partial u}$ и $\frac{\partial r}{\partial v}$ — компоненты матрицы A , линейно независимы. Т.е. эти два вектора определяют плоскость — **касательная плоскость** к Φ в т. M_0 .

Нормаль — вектор этой касательной плоскости: $n = \left[\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right]$

$\bar{n}$ непрерывен по u и v в некоторой окр-ти

произвольной точки поверхности $\Rightarrow \exists$ непрерывное

векторное поле

$$\left[\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right]$$

Такие поверхности F , на которых в целом существует непрерывное поле нормалей – двусторонние

Поверхность F полная, если $\forall$ фундаментальная посл-ть точек этой пов-ти сходится к точке этой пов-ти.

Поверхность F ограничена, если $\exists$ трехмерный шар, содержащий все точки этой поверхности.

Лемма 1:

[Если F – гладкая пов-ть и M_0 – не особая её точка, тогда достаточно малая окр-ть т. M_0 однозначно проектируется на касательную плоскость, проходящую через $\forall$ т. этой окр-ти.]

Доказательство:

Предполагаем, что это не так. Для $\forall$ не особой т. M_0 рассмотрим такую её окрестность: 1) эта окр-ть однозначно проектировалась на какую-либо координатную плоскость; 2) любые 2 нормали к т-ти этой окрестности на F составили угол меньше $\pi/4$.

Пусть данная окрестность не однозначно проектируется на касательную плоскость к F , проведенную в некоторой $M \in F$. $\Rightarrow PQ \in$ окрестности, $\overline{PQ} \parallel \vec{n}_M$. Рассмотрим линию пересечения F с плоскостью, $\parallel O\vec{x}$ и проходящей через PQ . По т. Лагранжа на этой линии $\exists N$, касательная к которой $\parallel PQ$ и следовательно $\parallel \vec{n}_M$. Значит, что $\vec{n}_M \perp \vec{n}_N$, что противоречит выбору F .

Лемма 2:

[Для гладкой ограниченной полой поверхности F без особых точек $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall$ часть F размера $< \delta$ однозначно проектируется на: а) одну из координатных плоскостей; б) на касательную плоскость, проходящую через $\forall$ т. этого участка.]

Доказательство:

Предположим, что для $\forall \delta_n = 1/n \exists$ участок $F_n \subset F$ размера $< 1/n$ и $\exists M_n \in F_n$, т.ч. F_n не однозначно проектируется на касательную т-ть к F_n в M_0 . $\{M_n\} \subset F$ – ограниченная посл-ть $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпослед-ть $\{M_k\} \rightarrow M_0 \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow M_0 \in F$. Точка M_0 – не особая на $F \Rightarrow \exists$ окрестность т. M_0 , удовлетв. требованиям леммы 1. Тогда все F_{k_n} , начиная с k_1 , попадут внутрь F , что противоречит выбору частей F_n .

Лемма 3:

[Пусть F – гладкая без особых точек двусторонняя полая ограниченная пов-ть, Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: в $\forall$ части F размера $< \delta$: $1 - \varepsilon < \cos(\vec{n}_{M_1}, \vec{n}_{M_2}) \leq 1$]

Доказательство:

F двусторонняя $\Rightarrow$ поле нормалей непрерывно $\Rightarrow$ равномерно непрерывно на F . $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall M_1, M_2, |M_1 M_2| < \delta \Rightarrow |\vec{n}(M_2) - \vec{n}(M_1)| < \sqrt{2} \varepsilon$ ($\vec{n}$ – вектор единичной нормали)
 $\vec{n}_0(M) = \vec{n}(M) / |\vec{n}(M)| : |\vec{n}_0(M_2) - \vec{n}_0(M_1)|^2 < \varepsilon^2$
 $|\vec{n}_0(M_1)|^2 + |\vec{n}_0(M_2)|^2 - 2(\vec{n}_0(M_1), \vec{n}_0(M_2)) = |\vec{n}_0(M_1)| \cdot |\vec{n}_0(M_2)| \cdot \cos(\vec{n}_0(M_1), \vec{n}_0(M_2))$
 $\Rightarrow 2 - 2 \cos(\vec{n}_0(M_1), \vec{n}_0(M_2)) < 2\varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon/2 < \cos(\vec{n}(M_1), \vec{n}(M_2)) \leq 1$

24. Площадь поверхности. Квадрируемость поверхности.

Пусть поверхность S — гладкая, без особых точек, ограниченная, полная, двусторонняя.

1) Рассмотрим на S N конечное число гладких спрямленных кривых, $S = \bigcup_{k=1}^N S_k$.

Выберем такое разбиение поверхности S , чтобы $\forall$ часть S_k однозначно проектировалась на касательную плоскость в $\forall$ своей точке.

2) Выберем на S_k $\forall$ точку M_{ki} и спроецируем S_k на касательную плоскость, проходящую через $m. M_{ki}$. Пусть S_k^* — плоская область. Тогда S_k^* квадрируема, т.к. ∂S_k^* — проекция ∂S_k , где ∂S_k — объединение конечного числа спр. кривых.

Пусть $G_k = |S_k^*| = \{ \text{площадь } S_k^* \}$. Составим их сумму: $\sum_k G_k$

Пусть Δ_k — размер S_k (радиус min шара) и $d = \max_{1 \leq k \leq N} \Delta_k$

Определение: G — предел суммы при $d \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall$ разбиение поверхности S с диаметром $d < \delta$ независимо от выбора $M_{ki} \in S_k$: $|\sum_{k=1}^N G_k - G| < \varepsilon$
Если для пов-ти S $\exists$ предел суммы G при $d \rightarrow 0$, то S квадрируема.

Теорема 1:

[Любая гладкая, ограниченная, полная, без особых точек, двусторонняя поверхность квадрируема.]

Доказательство:

$\forall \varepsilon > 0$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы выполнялись условия леммы 2 и 3.

1) $\forall$ часть пов-ти S размера $< \delta$ однозначно проектируется на касательную плоскость, проведенную в $\forall$ точке этой части;

2) в $\forall$ части $S^* \subset S$ размера $< \delta$ выполняется: $1 - \varepsilon/G < \cos(\bar{n}(M_1), \bar{n}(M_2)) \leq 1$, $M_1, M_2 \in S^*$

Рассмотрим $\forall$ разбиение S на S_k размера $< \delta$: $S = \bigcup S_k$. Выберем $M_k \in S_k$, $\forall k$.

Для вычисления площади G_k воспользуемся формулой замены переменных в двойном интеграле. Выберем систему координат: касат. совпадет с M_k , Oz направлена по нормали к пов-ти в M_k , Ox и Oy в касат. пл-ти в M_k .

В этой системе S определяется ур-нием $r = r(u, v)$, $\bar{n} = [\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}]$
имеет координаты $\{A, B, C\}$: $A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Косинус между нормалью и Oz : $\cos(\bar{n}, Oz) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > 0$

Если части S_k отвечает часть S_k^* простой плоской области S^* , то

при переходе от (x, y) к (u, v) : $G_k = \iint_{S_k^*} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv = \iint_{S_k^*} \cos(\bar{n}, Oz) |[\bar{r}'_u, \bar{r}'_v]| du dv$

$= \cos(\bar{n}(M_k), Oz) S_k^* \iint_{S_k^*} |[\bar{r}'_u, \bar{r}'_v]| du dv$

$|\sum G_k - G| = |\sum \cos(\bar{n}(M_k^*), \bar{n}(M_k)) S_k^* \iint_{S_k^*} |[\bar{r}'_u, \bar{r}'_v]| du dv - \sum S_k^* \iint_{S_k^*} |[\bar{r}'_u, \bar{r}'_v]| du dv| =$

$= \sum (1 - \cos(\bar{n}(M_k^*), \bar{n}(M_k))) \cdot S_k^* \iint_{S_k^*} |[\bar{r}'_u, \bar{r}'_v]| du dv$

$1 - \cos(\bar{n}(M_k^*), \bar{n}(M_k)) < \varepsilon/G \Rightarrow |\sum G_k - G| \leq \varepsilon/G \cdot \iint |[\bar{r}'_u, \bar{r}'_v]| du dv = \frac{\varepsilon}{G} \cdot G = \varepsilon$

25. Поверхностные интегралы первого и второго рода.

Пусть поверхность S — гладкая, без особых точек ограниченная полная, двусторонняя и имеет площадь.

На Φ определены непрерывные ф-ии: $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Рассмотрим разбиение $S = \bigcup S_k$ с диаметром разбиений $d = \max S_k$.

Пусть $|S_k| = G_k$. Выберем для каждого S_k точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$.

Пусть $\vec{n}(M_k)$ — единичная нормаль в т. M_k , $\vec{n}(M_k) = (\cos X_k, \cos Y_k, \cos Z_k)$

Введем следующие интегральные суммы:

$$1) S_0(f) = \sum_k f(M_k) \cdot G_k$$

$$3) S_2(Q) = \sum_k Q(M_k) \cdot G_k \cdot \cos Y_k$$

$$2) S_1(P) = \sum_k P(M_k) \cdot G_k \cdot \cos X_k$$

$$4) S_3(R) = \sum_k R(M_k) \cdot G_k \cdot \cos Z_k$$

Определение: I_i — предел интегральных сумм S_i при стремлении $d \rightarrow 0$:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ т.ч. $\forall$ разбиение S с $d < \delta$ и при $\forall$ выборе M_k : $|S_i - I| < \varepsilon$

1) Если предел S_0 при $d \rightarrow 0$: $I_0 = \iint_S f(M) dG$ — поверхн. интеграл 1-го рода

1) Если предел S_1 при $d \rightarrow 0$: $I_1 = \iint_S P(M) \cos X dG$

Если предел S_2 при $d \rightarrow 0$: $I_2 = \iint_S Q(M) \cos Y dG$

Если предел S_3 при $d \rightarrow 0$: $I_3 = \iint_S R(M) \cos Z dG$

поверхностные
интегралы
2-го рода

$I_1 + I_2 + I_3$ — общий поверхностный интеграл 2-го рода

Из определения следует, что если мы выберем другую сторону поверхности, то интегралы 2-го рода сменят знак, а 1-го — нет.

Теорема 1:

Если S — гладкая двусторонняя полная ограниченная пов-ть без особых точек, задаваемая ур-нием $\Gamma = \Gamma(u, v)$, а ф-ия $f(P, Q, R)$ непрерывна вдоль Φ , то поверхностные интегралы существуют и сводятся к двойным: $\iint_S f(M) dG = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |[\Gamma'_u, \Gamma'_v]| du dv$

Доказательство:

Интеграл, стоящий в правой части (I') существует, т.к. подинт. ф-ия непрерывна. Поэтому достаточно доказать, что предел сумм S_i при $d \rightarrow 0$ существует и равен I' .

$$\forall \varepsilon > 0: S_0 - I' = \sum_k f(M_k) \cdot G_k - \sum_{\Omega} \iint f(M) \cdot |[\Gamma'_u, \Gamma'_v]| du dv = \sum_k f(M_k) \iint_{\Omega} |[\Gamma'_u, \Gamma'_v]| du dv - \sum_{\Omega} \iint f(M) |[\Gamma'_u, \Gamma'_v]| du dv = \sum_{\Omega} \iint (f(M_k) - f(M)) |[\Gamma'_u, \Gamma'_v]| du dv$$

Ф-ия $f(M)$ непрерывна $\Rightarrow$ равномерно непрерывна в Ω :

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\rho(M, M_k) < \delta: |f(M) - f(M_k)| < \varepsilon/G$

$$|S_0 - I'| \leq \varepsilon/G \cdot \sum_{\Omega} \iint |[\Gamma'_u, \Gamma'_v]| du dv = \varepsilon/G \cdot \iint_{\Omega} |[\Gamma'_u, \Gamma'_v]| du dv = \varepsilon/G \cdot G = \varepsilon$$

26. Преобразование базисов. Инварианты линейного оператора.

Пусть E^3 — трехмерное евклидово пространство.

Определение: базис e^j ортогонален базису e^i , если $(e^i, e^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Утверждение: для $\forall$ базиса e^i пр-ва E^n $\exists!$ ортогональный базис e^j .

L — линейная оболочка $e_1, e_2, \dots, e_n$. Из ортогонального L пространства возьмем вектор e^i , нормированный условием $(e^i, e^i) = 1$.

Векторы $e^j, j = \overline{1, n}$ образуют базис пр-ва E^n .
 $\alpha_1 e^1 + \dots + \alpha_n e^n = 0$; умножая скалярно последнее равенство на $e_1, \dots, e_n$ получим $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0 \Rightarrow e^1, \dots, e^n$ образуют базис.

Пусть наряду с e^j $\exists$ еще один ортогональный базис $\tilde{e}^j$. Тогда $(e^i, e^j - \tilde{e}^j) = 0 \Rightarrow e^j = \tilde{e}^j$.

$$e^k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k, e^i) e^i}{|e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k, e^i) e^i|}, \quad i = \overline{1, n}$$

Преобразование базисов:

e_* и e^* — ортогональные базисы $\rightarrow f_*, f^*$ — новая пара ортогональных базисов
 B — матрица перехода e_* к f_* . C — матрица перехода от e^* к f^* .

Утверждение: Матрицы перехода связаны соотношением: $C^{-1} = B^T$

$B = (b_{ij})$: столбцы B — векторы f_* в базисе e_* : $f_k = \sum_{i=1}^n b_{ik} e_i$

$C = (c_{ij})$: столбцы C — векторы f^* в базисе e^* : $f^l = \sum_{j=1}^n c_{jl} e^j$

$(f_k, f^l) = \delta_k^l \Rightarrow (\sum_i b_{ik} e_i, \sum_j c_{jl} e^j) = \delta_k^l \Rightarrow \sum_{i,j} b_{ik} c_{jl} (e_i, e^j) = \delta_k^l \Rightarrow \sum_{i,j,k} b_{ik} c_{jl} (e_i, e^j) = \delta_k^l \Rightarrow \sum_{i,j,k} \{B^T\}_{ki} c_{jl} e_i = \delta_k^l \Rightarrow B^T C = I$

Инварианты линейных операторов в $\mathbb{R}^3$:

Рассмотрим линейный оператор $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Определение: величина $\sum (e^i, A e^i)$ — дивергенция оператора A . $\text{div } A$

Утверждение: величина $\sum (e^i, A e^i)$ не зависит (для A) от выбора пар взаимных базисов e_* и e^* , т.е. инвариант.

Перейдем к новой паре ортогональных базисов f_* и f^* .

$\sum_k (f_k, A f^k) = \sum_k (\sum_i b_{ik} e_i, A (\sum_j c_{jk} e^j)) = \sum_{i,j,k} b_{ik} c_{jk} (e_i, A e^j) = \sum_{i,j} \delta_{ij} (e_i, A e^j) = \sum (e_i, A e^i)$

Определение: величина $\sum [e^i, A e^i]$ — ротор оператора A . $\text{rot } A$.

Утверждение: величина $\sum [e^i, A e^i]$ не зависит (для A) от выбора пар взаимных базисов e_* и e^* , т.е. инвариант.

Перейдем к новой паре ортогональных базисов f_* и f^* .

$\sum_k [f_k, A f^k] = \sum_k [\sum_i b_{ik} e_i, A (\sum_j c_{jk} e^j)] = \{ \text{в силу линейности} \} = \sum_{i,j,k} b_{ik} c_{jk} [e_i, A e^j] = \sum_{i,j} \delta_{ij} [e_i, A e^j] = \sum [e_i, A e^i]$

Замечание: 1) A — матрица $M O A$. $A e_i = \sum a_{ij} e_j \Rightarrow (e^j, A e_i) = \sum a_{ik} (e^j, e_k) = a_{ij} \Rightarrow \text{div } A = \sum (e^i, A e^i) = (e^1, A e^1) + (e^2, A e^2) + (e^3, A e^3) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{tr } A$

2) Пусть $e_* = e^*$ (т.е. базис e_* ортонормированный)

$\sum [e^i, A e^i] = \sum [e^i, A e_i] = \sum [e^i, \sum_j a_{ij} e_j] = \sum_{i,j} a_{ij} [e^i, e_j] = (a_{33} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21})$

27. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля.
Повторные операции теории поля.

Скалярное поле в $\mathbb{R}^3$ — скалярная ф-ия в $\mathbb{R}^3$ (или $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$) $u(M): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.
Векторное поле в $\mathbb{R}^3$ — векторная ф-ия в $\mathbb{R}^3$ (или $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$) $\vec{F}(M): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Рассмотрим $\forall M \in \mathcal{D}: \overline{M_0 M} = \vec{F}(M) - \vec{F}(M_0) = \Delta \vec{F}$, $u(M) - u(M_0) = \Delta u(M_0)$

Определение: скалярное поле $u = f(x, y, z) = f(M)$ дифференцируемо в т. M_0 области $\mathcal{D}$, если $\exists \vec{g} \in \mathbb{R}^3: \Delta u(M_0) = (\vec{g}, \Delta \vec{r}) + o(|\Delta \vec{r}|)$, $\alpha(\Delta \vec{r}) \cdot \lim_{|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta \vec{r})}{|\Delta \vec{r}|} = 0$

Утверждение: вектор $\vec{g}$ в $\Delta u(M_0)$ определяется единственно образом (в т. M_0)

Пусть $\exists \vec{h}$, удовлетворяющий определению (в т. M_0): $(\vec{g}, \Delta \vec{r}) - \vec{0}(|\Delta \vec{r}|) = (\vec{h}, \Delta \vec{r}) - \vec{0}(|\Delta \vec{r}|)$
 $\Rightarrow (\vec{g} - \vec{h}, \Delta \vec{r}) = \vec{0}(|\Delta \vec{r}|) \Rightarrow (\vec{g} - \vec{h}, \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|}) = 0$

Выбираем т. M так, чтобы $\Delta \vec{r} = \vec{r}(M) - \vec{r}(M_0) \uparrow$ некоторому $\vec{e}$, т.ч. $|\vec{e}| = 1 \Rightarrow \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} = \vec{e}$
Следовательно при $\Delta \vec{r} \rightarrow 0: (\vec{g} - \vec{h}, \vec{e}) = 0$

Рассмотрим в качестве $\vec{e}$ вектор $\uparrow (\vec{g} - \vec{h}) \Rightarrow (\vec{g} - \vec{h}, \vec{g} - \vec{h}) = 0 \Rightarrow \vec{g} = \vec{h}$

Определение: $\vec{g}$ — градиент скалярного поля $u(M)$ в т. M_0 : $\vec{g} = \text{grad } u(M_0) = \nabla u(M_0)$.
Тем самым $\text{grad } u(M_0)$ — векторное поле, определенное там же, где и $u(M)$ диф-ма.

Пусть $u(M)$ — скалярное поле, диф-ое в т. M_0 : $\Delta u(M_0) = (\text{grad } u(M_0), \Delta \vec{r}) + \vec{0}(|\Delta \vec{r}|)$

Фиксируем вектор $\vec{e}$ и выберем $\Delta \vec{r} = t \cdot \vec{e}, t > 0$: $\Delta u(M_0) = u(\vec{r}(M_0) + t\vec{e}) - u(\vec{r}(M_0))$

Определение: скалярное поле имеет производную по направлению $\vec{e}$ в т. M_0 , если $\exists \lim_{t \rightarrow 0+0} \Delta u(M_0)/t = \partial u / \partial \vec{e}(M_0)$

Утверждение: при выполнении при всех указанных выше условиях $\exists \frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0)$
по $\forall$ направлению $\vec{e}$ и $\partial u / \partial \vec{e}(M_0) = (\text{grad } u(M_0), \vec{e})$

$\Delta u(M_0) = (\text{grad } u(M_0), t\vec{e}) + \vec{0}(t) \Rightarrow \Delta u(M_0)/t = (\text{grad } u(M_0), \vec{e}) + \vec{0}(t)/t \rightarrow 0$

Замечание: $|\partial u / \partial \vec{e}(M_0)| \leq |\text{grad } u(M_0)|$

Охуз в $\mathbb{R}^3$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: $\text{grad } u(M_0) = (\text{grad } u, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\text{grad } u, \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\text{grad } u, \vec{e}_3)\vec{e}_3 = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\vec{e}_3$

Определение: векторное поле $f(M)$ дифференцируемо в т. M_0 , если $\exists \mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Delta f(M_0) = \mathcal{A} \Delta \vec{r} + \vec{0}(|\Delta \vec{r}|)$, причем $\mathcal{A}$ не зависит от т. M_0 , $\vec{0}(|\Delta \vec{r}|) \sim \alpha(M_0 M) \cdot \lim_{|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\alpha(M_0 M)}{|\Delta \vec{r}|} = 0$

Утверждение: если $f(M)$ диф-ма в т. M , то $\mathcal{A}$ определяется однозначно.

Пусть $\exists \mathcal{B}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} \Delta \vec{r} + \vec{0}(|\Delta \vec{r}|) = \mathcal{B} \Delta \vec{r} + \vec{0}(|\Delta \vec{r}|) \Rightarrow (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \Delta \vec{r} = \vec{0}(|\Delta \vec{r}|)$, $\Delta \vec{r} \rightarrow 0$

Выберем $\forall$ единичный вектор $\vec{e}$ и $\Delta \vec{r} = h \cdot \vec{e}, h \rightarrow 0$:

$(\mathcal{A} - \mathcal{B}) h \vec{e} = \vec{0}(|h|) \Rightarrow (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \vec{e} = \vec{0}(h)/h, |h| \rightarrow 0 \Rightarrow (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \vec{e} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$

Пусть выбран вектор $\vec{e}$ и для $f(M)$ рассмотрим его приращение $\Delta f(M_0)$ только в направлении $\vec{e}$ $\overline{M_0 M} = t \cdot \vec{e}, t > 0$.

Определение: векторное поле имеет производную по направлению $\vec{e}$, если $\exists \lim_{t \rightarrow 0+0} \Delta f(M_0)/t = \partial f / \partial \vec{e}(M_0)$

Утверждение: если векторное поле $f(M)$ диф-мо в т. M_0 , то в этой точке

оно имеет производную по $\forall$ направлению $\vec{e}$ и $\partial f / \partial \vec{e}(M_0) = \mathcal{A} \vec{e}$

$\Delta f(M_0) = \mathcal{A} t \vec{e} + \vec{0}(t) \Rightarrow \frac{\Delta f(M_0)}{t} = \mathcal{A} \vec{e} + \frac{\vec{0}(t)}{t} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0) = \mathcal{A} \vec{e}$

Пусть в $\mathbb{R}^3$ выбран ортонорм. базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \Rightarrow$

$f(M) = P(x, y, z)\vec{e}_1 + Q(x, y, z)\vec{e}_2 + R(x, y, z)\vec{e}_3$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1} = \mathcal{A} \vec{e}_1 = \frac{\partial P}{\partial x}(M_0)\vec{e}_1 + \frac{\partial Q}{\partial x}(M_0)\vec{e}_2 + \frac{\partial R}{\partial x}(M_0)\vec{e}_3$

$$\mathcal{A} \vec{e} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{vmatrix} \vec{e}$$

Определение: дивергенция векторного поля $f(M)$ – дивергенция матрицы A .
ротор векторного поля $f(M)$ – ротор матрицы A .

МНЕМОНИЧ. ПРАВИЛО

Полога в ортонормированном базисе векторное поле f и $\operatorname{div} f$:
 $\operatorname{div} f = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, $\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{e}_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{e}_3$

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Повторим операции теории поля:

Пусть в области D заданы $u(M)$ и $f(M)$, причем все ЧП второго порядка непрерывны в D .
Полога $\operatorname{div} f(M)$ – гир. скалярное поле, а $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{rot} f(M)$ – гир-ые векторные поля.

1. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$
 $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla, \operatorname{grad} u] = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)\bar{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\bar{e}_3 = 0$

2. $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$
 $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$

3. $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$
 $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla, \operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$ – Лапласиан

28. Формула Грина. Формула Остроградского-Гаусса.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана плоскость π , $\vec{k}$ - вектор нормали к π .

$D \subset \pi$ - односвязная область. $\partial D \equiv C$ - кусочно-гладкая спрямляемая кривая.

Для простоты область D такова, что на π может быть выбраны Oxy так, что $\forall$ прямая ($x = \text{const}$, $y = \text{const}$) пересекает C не более чем в 2-х точках.

Рассмотрим векторное поле $\vec{a}$ в $\mathbb{R}^3$: проекция $\vec{a}$ на π непрерывно диф-ма в D .

$\vec{E}$ - единичный вектор касательной к C на π , совмещенный с положительным направлением обхода C .

Теорема 1:

Если область D и векторное поле $\vec{a}$ удовлетворяют всем перечисленным условиям и, кроме того, производная $\vec{a}$ по любому направлению непрерывна в области $D \cup C = \overline{D}$. Тогда: $\oint_C (\vec{k}, \text{rot} \vec{a}) d\sigma = \oint_C (\vec{a}, \vec{E}) dl$

↑ Формула Грина

Доказательство:

Выберем $Oxyz$ так, чтобы выполнялось координатное условие D и $Oz \parallel \vec{k}$.

$\vec{a} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} + R(x,y)\vec{k}$ плоское $\Rightarrow R(x,y) = 0$.

$\vec{t} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \{\cos \alpha, \sin \alpha, 0\}$

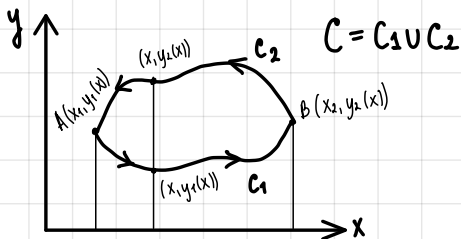
$$\bullet \text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\bullet (\vec{k}, \text{rot} \vec{a}) = \partial Q / \partial x - \partial P / \partial y$$

$$\bullet (\vec{a}, \vec{t}) = P \cos \alpha + Q \sin \alpha$$

Поскольку $d\sigma = dx dy$ (плоская область), $dx = \cos \alpha dl$, $dy = \sin \alpha dl$

$$\oint_D (\vec{k}, \text{rot} \vec{a}) d\sigma = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) dl = \oint_C P dx + Q dy$$



$$\bullet - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_2(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1(x)) dx = \int_{C_2} P dx - \left(- \int_{C_1} P dx \right) = \oint_C P dx$$

$$\bullet \text{Аналогично получим, что } \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy$$

Пусть $\mathcal{D}$ — односвязная область в $\mathbb{R}^3$, S — её граница, n — нормаль к S :

1) поверхность S — кусочно гладкая двусторонняя полина ограниченная замкнутая и без особых точек;

2) $Oxyz$ такова, что для каждой из осей координат $\forall$ прямая $\parallel Ox (Oy, Oz)$ будет пересекать поверхность S не более чем в 2 точках.

Теорема 2:

Пусть a — векторное поле, дифференцируемое в области $\mathcal{D}$; $\mathcal{D}$ удовл. вписанным условиям, производная по $\forall$ направлению непрерывна в $\mathcal{D} \cup S = \overline{\mathcal{D}}$. Тогда: $\overline{\mathcal{D}} \iiint \operatorname{div} a \, dV = \int_S \phi(a, n) \, ds$

↑ формула Остроградского — Гаусса

Доказательство:

Выберем $Oxyz$ так, чтобы выполнялось условие 2).

$$a = \{P, Q, R\}, \quad n = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

$$\cos \alpha \, ds = dy \, dz, \quad \cos \beta \, ds = dz \, dx; \quad \cos \gamma \, ds = dx \, dy$$

$$\overline{\mathcal{D}} \iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \int_S \phi(P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, ds = \int_S \phi(P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy)$$

$$\text{Докажем, что } \overline{\mathcal{D}} \iiint \frac{\partial R}{\partial z} dx \, dy \, dz = \int_S \phi R \, dx \, dy$$

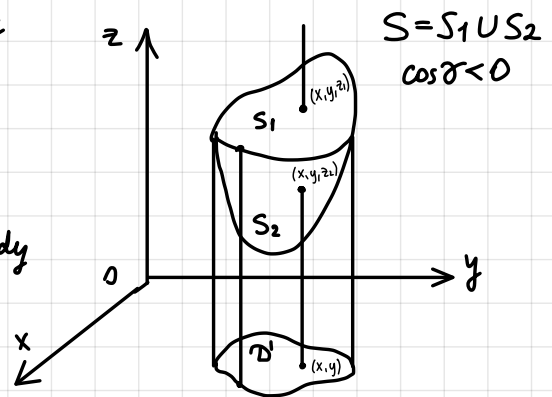
$$\overline{\mathcal{D}} \iint_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \int \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz \, dx \, dy =$$

$$= \int_{\mathcal{D}} R(x,y,z_1(x,y)) \, dx \, dy - \int_{\mathcal{D}} R(x,y,z_2(x,y)) \, dx \, dy =$$

$$= \int_{S_1} R(x,y,z) \, dx \, dy + \int_{S_2} R(x,y,z) \, dx \, dy = \int_S \phi R(x,y,z) \, dx \, dy$$

$$\text{Аналогично } \overline{\mathcal{D}} \iiint \frac{\partial P}{\partial x} dx \, dy \, dz = \int_S \phi P \, dy \, dz$$

$$\overline{\mathcal{D}} \iiint \frac{\partial Q}{\partial y} dx \, dy \, dz = \int_S \phi Q \, dz \, dx$$



29. Формула Стокса.

30. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования.